I. المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$.

01. حل المعادلة : $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$ مع a عدد حقيقي

❖ نشاط:

أ – حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = 0$. ب – حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = 2$. ج – حل المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = -2$.

د – أعط الخاصية:

❖ خاصية:

ليكن a من $\mathbb{R}$. مجموعة حلول المعادلة: $z \in \mathbb{C} / z^2 = a$ هي:

- $S = \{0\}$ إذا كان: $a = 0$
- $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ إذا كان: $a > 0$
- $S = \{i\sqrt{-a}, -i\sqrt{-a}\}$ إذا كان: $a < 0$

02. المعادلة $z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ مع a و b و c من $\mathbb{R}$ (معاملاتها أعداد حقيقية) مع $a \neq 0$.

❖ نشاط:

03. خاصية و تعريف:

لنعتبر المعادلة: $(E): z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ (معاملاتها أعداد حقيقية) مع $a \neq 0$.

- المعادلة (E) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول z في $\mathbb{C}$ معاملاتها الأعداد حقيقية a و b و c مع $a \neq 0$
- العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E).
- إذا كان $\Delta = 0$ المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا مزدوج $z = \frac{-b}{2a}$
- إذا كان : $\Delta > 0$ المعادلة (E) تقبل حلين حقيقيين هما: $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان : $\Delta < 0$ المعادلة (E) تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين هما: $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- لدينا: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$.
- تعميل ل: $az^2 + bz + c$ هو : $\Delta \neq 0 : az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$. $\Delta = 0 : az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$

04. برهان :

لنعتبر المعادلة: $(F): z \in \mathbb{C} / az^2 + bz + c = 0$

أ- لدينا : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

ب- و منه :

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \qquad ;\ (a\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \qquad ;\ (1)$$

حالة 1 : $\Delta=0$ نحصل على : $z=-\frac{b}{2a}\Leftrightarrow 0=\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow(1)$ ومنه : المعادلة لها حل مزدوج هو $z=-\frac{b}{2a}$

حالة 2 : $\Delta>0$ بما أن $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ المعادلة لها حلين مختلفين هما : $z=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

حالة 3 : $\Delta<0$ إذن $-\Delta>0$ ومنه : $\Delta=-1\times(-\Delta)=i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2=\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

$$(1)\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z+\frac{b}{2a}=-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z=-\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ أو } z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ومنه : المعادلة لها حلين هما : $z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ أو $z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (حلين عقديين مترافقين) .

05. مثال :

لنعتبر المعادلة التالية: $(E):z\in\mathbb{C}/z^2+z+1=0$

1) أحسب : Δ المميز للمعدلة (E):

2) حل المعادلة: $(E):z\in\mathbb{C}/z^2+z+1=0$.

3) أعط الشكل المثلثي للحلين .

II. الشكل العقدي لبعض التحويلات في المستوى

01. مفردات :

المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(0,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

- لنعتبر تطبيق f المعرف بما يلي : $\begin{aligned} g:\mathbb{C}&\to\mathbb{C}\\ z&\mapsto f(z)=z'\end{aligned}$
- M و M' نقطتين من (P) لحقهما على التوالي z و z' .
- التطبيق f في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ يسمى تحويل المرتبط ب g .

- الكتابة $z'=f(z)$ تسمى الكتابة العقدية للتحويل f .

02. الكتابة العقدية لبعض التحويلات الهندسية :

أ- الكتابة العقدية للإزاحة $f=t_{\vec{u}}$:

❖ خاصية :

الكتابة العقدية للإزاحة $t_{\vec{u}}$ ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها b هي $z'=z+b$ (أي $f(z)=z+b$) .

❖ ملحوظة :

$\vec{u}=\vec{0}$ نحصل على $z'=z$ أي $M=M'$ التحويل يصبح التطبيق المطابق في المستوى .

❖ مثال :

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z'=z+2-3i$.

التحويل هو إزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $b=2-3i$ (أي $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$) .

ب- الكتابة العقدية للتحاكي $f=h(\Omega,k)$:

❖ خاصية :

الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه Ω التي لحقها ω و نسبته عدد حقيقي k غير منعدم و يخالف 1 هو : $z'-\omega=k(z-\omega)$
أو أيضا : $z'=kz+b$ (مع $b=k\omega+\omega\in\mathbb{C}$) (أي $f(z)=kz+b$ مع $k\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$).

❖ ملحوظة :

النقط Ω ولحقها ω صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega=k\omega+b$ إذن: $\omega=\dfrac{b}{1-k}$.

❖ مثال :

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z'=2z+1+i$.

لدينا : الكتابة العقدية هي على شكل : $z'=kz+b$ مع $k=2\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ إذن التحويل هو تحاكي نسبته $k=2$ و مركزه $\Omega_{(\omega)}$ حيث : $\omega=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{1+i}{1-2}=-1-i$

خلاصة: التحويل هو التحاكي: $h\left(\Omega_{(\omega=-1-i)},2\right)$ (المركز هو النقطة $\Omega(-1,-1)$)

ج- الكتابة العقدية للدوران $f=r(\Omega,\theta)$

❖ خاصية :

الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه Ω التي لحقها ω و زاويته θ هو : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$
أو أيضا : $z'=ze^{i\theta}+b$ (مع $b=\omega-\omega e^{i\alpha}\in\mathbb{C}$) (أي $f(z)=ze^{i\theta}+b$) .

❖ ملحوظة : بالنسبة للتطبيق : $f(z)=ze^{i\theta}+b$

- المركز هو : النقط Ω ولحقها ω صامدة بالتحويل تحقق ما يلي: $\omega=\omega e^{i\theta}+b$ إذن : $\omega=\dfrac{b}{1-e^{i\theta}}$.

- قياس زاويته هو : $\theta \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right)\ (2\pi)$ أو أيضا : $\theta \equiv \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\ (2\pi)$.

❖ مثال :

لنعتبر التحويل f الذي يربط كل نقطة $M_{(z)}$ بالنقطة $M_{(z')}$ حيث : $z'=-iz+1-i$.

لدينا : $z'=-iz+1-i=e^{i\pi}z+(1-i)$ الكتابة العقدية هي على شكل : $z'=ze^{i\theta}+b$

التحويل هو الدوران الذي:

لحق مركزه $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1-i}{1+i}=-i$ ومنه : المركز هي النقطة $\Omega_{(\omega=-i)}$ أو أيضا $\Omega(0,-1)$.

قياسات زاويته: $\arg\left(e^{i\theta}\right)\equiv\arg(-i)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

خلاصة: التحويل هو الدوران: $r\left(\Omega_{(\omega=-i)},-\frac{\pi}{2}\right)$ (مركزه هي النقطة $\Omega(0,-1)$)

د- تمرين تطبيقي :

من بين الكتابات العقدية التالية حدد طبيعة التحويلات و حدد عناصرها المميزة .

1. $z'=-4z-2+5i$.
2. $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z-4+2i$.

جواب :

1. بالنسبة ل : $z'=-3z-8+12i$

لدينا : الكتابة العقدية هي على شكل : $z'=kz+b$ مع $k=-4\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ إذن التحويل هو تحاكي نسبته $k=-3$.

مركزه : $\Omega_{(\omega)}$ نقطة صامدة إذن $\Omega=\Omega'$ ومنه $\omega'=\omega$ و بالتالي : $\omega=-3\omega-8+12i$ ومنه :

$\omega=\frac{-8+12i}{4}=-2+3i$ (يمكنك استعمال العلاقة $\omega=\frac{b}{1-k}=\frac{-8+12i}{1+3}=-2+3i$)

خلاصة: التحويل هو التحاكي نسبته $k=-3$ و مركزه Ω التي لحقها $\omega=-2+3i$.

2. بالنسبة ل : $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z-4+2i$

لدينا : $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z-4+2i=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z+-4+2i=e^{i\frac{\pi}{6}}z-4+2i$ الكتابة العقدية هي على شكل :

$z'=ze^{i\theta}+b$

التحويل هو الدوران الذي:

لحق مركزه $\omega=\frac{b}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}}=\frac{-4+2i}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=-4-\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$ ومنه : المركز هي النقطة $\Omega\left(-4-\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i\right)$

أو أيضا $\Omega\left(-4-\sqrt{3};-(3+2\sqrt{3})\right)$.

قياس زاويته: $\arg\left(e^{i\theta}\right)\equiv\arg\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

خلاصة: التحويل هو الدوران: و مركزه Ω التي لحقها $\omega=-4-\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i$ وزاويته $\frac{\pi}{6}$.

ه- ملخص لبعض التحويلات :

طبيعة التحويل : f	العناصر المميزة	تعريف التحويل مع : $f(M)=M'$	الكتابة العقدية ل f مع $M_{(z)}$ و $M'_{(z')}$
إزاحة : $f=t_{\vec{u}}$	• متجهة معلومة $\vec{u}$ غير منعدمة لحقها b	$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$	$z'-z=b$ أي $z'=z+b$
تحاكي : $f=h(\Omega,k)$	• نقطة Ω صامدة لحقها ω • عدد حقيقي k غير منعدم	$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$	$z'-\omega=k(z-\omega)$ أي $z'=kz+b$ (مع $b=k\omega+\omega\in\mathbb{C}$)
دوران : $f=r(\Omega,\alpha)$	• نقطة Ω صامدة لحقها ω • زاوية موجهة قياسها α بترديد 2π	$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$	$z'-\omega=(z-\omega)e^{i\alpha}$ أي $z'-\omega=e^{i\alpha}z+b$ (مع $b=\omega-\omega e^{i\alpha}$)

ملحوظة بالنسبة للدوران :

لدينا :

$$\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=1\\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha\ (2\pi)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{z'-\omega}{z-\omega}=[1,\alpha]=e^{i\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z'-\omega=(z-\omega)e^{i\alpha}$$