

تمارين و حلول

7

تمرين 1 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\begin{array}{lll} 8e^{3x} - 1 = 0 & (3) & e^{x^2+x} = 1 & (2) & e^{x-2} = e & (1) \\ 6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0 & (6) & e^x - 2e^{-x} - 1 = 0 & (5) & e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 & (4) \end{array}$$

الحل

(1) حل المعادلة : $e^{x-2} = e$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ $e^{x-2} = e^1$

أي : $x - 2 = 1$ أي : $x = 3$

إذن مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $S = \{3\}$

(2) حل المعادلة : $e^{x^2+x} = 1$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ $e^{x^2+x} = e^0$

أي : $x^2 + x = 0$ أي : $x(x+1) = 0$

أي : $x = 0$ أو $x = -1$

إذن : $S = \{-1, 0\}$

(3) حل المعادلة : $8e^{3x} - 1 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ $e^{3x} = \frac{1}{8}$

أي : $3x = \ln \frac{1}{8}$ أي : $x = \frac{-\ln 8}{3}$

أي : $x = \frac{-3\ln 2}{3}$ أي : $x = -\ln 2$

إذن : $S = \{-\ln 2\}$

(4) حل المعادلة : $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

حلا المعادلة $t^2 - 3t + 2 = 0$ هما 1 و 2

إذن المعادلة $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

تكافئ $e^x = 2$ أو $e^x = 1$

أي : $x = \ln 2$ أو $x = \ln 1$

أي : $x = 0$ أو $x = \ln 2$

ومنه : $S = \{0, \ln 2\}$

(5) حل المعادلة : $e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ $e^x - \frac{2}{e^x} - 1 = 0$

أي : $(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$

أي : $e^x = 2$ أو $e^x = -1$

(لأن حلي المعادلة $t^2 - t - 2 = 0$ هما -1 و 2)

أي : $e^x = 2$ (لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $x = \ln 2$ إذن : $S = \{\ln 2\}$

(6) حل المعادلة : $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ

$$6e^{5x+2} - 7\sqrt{(e^{4x+2})^2} + e^{3x+2} = 0$$

أي : $6e^{5x+2} - 7e^{4x+2} + e^{3x+2} = 0$

أي : $e^{3x+2}(6e^{2x} - 7e^x + 1) = 0$

أي : $6e^{2x} - 7e^x + 1 = 0$ (لأن $e^{3x+2} \neq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x = 1$ أو $e^x = \frac{1}{6}$

(لأن حلي المعادلة $6t^2 - 7t + 1 = 0$ هما $\frac{1}{6}$ و 1)

أي : $x = -\ln 6$ أو $x = 0$

إذن : $S = \{-\ln 6, 0\}$

تمرين 2 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$$\begin{array}{lll} e^{2x} - 3e^x < 0 & (3) & \frac{e^x - 2}{e^x + 1} > 0 & (2) & e^{x-1} < 1 & (1) \\ e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0 & (6) & e^x - 2e^{-x} + 1 < 0 & (5) & e^{2x} + e^x - 6 \geq 0 & (4) \end{array}$$

الحل

1 حل المتراجحة : $e^{x-1} < 1$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ $e^{x-1} < e^0$
أي : $x-1 < 0$ أي : $x < 1$

إذن مجموعة حلول هذه المتراجحة هي : $S =]-\infty, 1[$

2 حل المتراجحة $\frac{e^x-2}{e^x+1} > 0$

بما أن $e^x+1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

فإن المتراجحة تكافئ $e^x-2 > 0$

أي : $e^x > 2$ أي : $x > \ln 2$

وبالتالي فإن : $S =]\ln 2; +\infty[$

3 حل المتراجحة $e^{2x}-3e^x < 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ $e^x(e^x-3) < 0$

أي : $e^x-3 < 0$ (لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x < 3$ أي : $x < \ln 3$

إذن : $S =]-\infty; \ln 3[$

4 حل المتراجحة : $e^{2x}+e^x-6 \geq 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ $(e^x-2)(e^x+3) \geq 0$

أي : $e^x-2 \geq 0$ (لأن $e^x+3 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x \geq 2$ أي : $x \geq \ln 2$

إذن : $S = [\ln 2, +\infty[$

5 حل المتراجحة : $e^x-2e^{-x}+1 < 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ $e^x-\frac{2}{e^x}+1 < 0$

أي : $\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^x} < 0$ أي : $e^{2x}+e^x-2 < 0$

(لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $(e^x-1)(e^x+2) < 0$

أي : $e^x-1 < 0$ (لأن $e^x+2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $e^x < 1$ أي : $x < 0$

إذن : $S =]-\infty, 0[$

6 حل المتراجحة : $e^{3x}-6e^{2x}+8e^x > 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المتراجحة تكافئ

$e^x(e^{2x}-6e^x+8) > 0$

أي : $e^{2x}-6e^x+8 > 0$ (لأن $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

أي : $(e^x-2)(e^x-4) > 0$

الجدول التالي يعطي إشارة $(e^x-2)(e^x-4)$:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$
e^x-2	-	0	+	+
e^x-4	-	-	0	+
$(e^x-2)(e^x-4)$	+	0	-	+

إذن : $S =]-\infty, \ln 2[\cup]2\ln 2, +\infty[$

تمارين 3 :

حل في $\mathbb{R}^2$ كلا من النظامين التاليين :

$$\begin{cases} e^x+e^y=\frac{8}{7} \\ x+y=-\ln 7 \end{cases} \quad 1$$

$$\begin{cases} 5e^{-x}+3e^{-y}=11 \\ 7e^{-x}-4e^{-y}=-1 \end{cases} \quad 2$$

الحل

$$\begin{cases} e^x+e^y=\frac{8}{7} \\ x+y=-\ln 7 \end{cases} \quad 1 \text{ حل النظام :}$$

لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، هذه النظام تكافئ : $\begin{cases} e^x+e^y=\frac{8}{7} \\ e^{x+y}=e^{\ln \frac{1}{7}} \end{cases}$

$$\begin{cases} e^x+e^y=\frac{8}{7} \\ e^x \cdot e^y=\frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{أي :}$$

وإذا وضعنا : $e^x=a$ و $e^y=b$

• مجموعة تعريف هذه النظمة هي $\mathbb{R}^2$

• إذا وضعنا $e^{-x} = a$ و $e^{-y} = b$

$$\begin{cases} 5a + 3b = 11 \\ 7a - 4b = -1 \end{cases} \text{ فإن النظمة تُصَبِّح}$$

وبحل هذه النظمة نجد أن : $a = 1$ و $b = 2$

أي : $e^{-x} = 1$ و $e^{-y} = 2$

أي : $x = 0$ و $-y = \ln 2$

أي : $x = 0$ و $y = -\ln 2$

وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه النظمة هي :

$$S = \{(0, -\ln 2)\}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{8}{7} \\ ab = \frac{1}{7} \end{cases} \text{ فإن النظمة تُصَبِّح :}$$

وبحل هذه النظمة نجد أن :

$$(a = 1 \text{ و } b = \frac{1}{7}) \text{ أو } (a = \frac{1}{7} \text{ و } b = 1)$$

$$\text{أي : } (e^x = 1 \text{ و } e^y = \frac{1}{7}) \text{ أو } (e^x = \frac{1}{7} \text{ و } e^y = 1)$$

$$\text{أي : } (x = 0 \text{ و } y = -\ln 7) \text{ أو } (x = -\ln 7 \text{ و } y = 0)$$

$$\text{وبالتالي فإن : } S = \{(0, -\ln 7), (-\ln 7, 0)\}$$

$$\begin{cases} 5e^{-x} + 3e^{-y} = 11 \\ 7e^{-x} - 4e^{-y} = -1 \end{cases} \text{ حل النظمة } \quad (2)$$

تمارين 4 :

$$(1) \text{ نعتبر النظمة } \begin{cases} xy + 2 = 2x \\ 2x - y = m \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ حيث } m \text{ بارامتر حقيقي.}$$

• أ ناقش حسب قيم m عدد حلول هذه النظمة.

• ب حل النظمة من أجل $m = 3$

(2) استنتج مما سبق حل كل من النظميتين التاليتين :

$$\begin{aligned} \text{• أ } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} e^{x+y} + 2 = 2e^x \\ 2 - e^{y-x} = 3e^{-x} \end{cases} \\ \text{• ب } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \ln x \ln y + 2 = \ln x^2 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

الحل

$$(1) \text{ • أ عدد حلول النظمة } \begin{cases} xy + 2 = 2x \\ 2x - y = m \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

لكل (x, y) من $\mathbb{R}^2$ ، هذه النظمة تكافئ

$$\begin{cases} y = 2x - m \\ 2x^2 - (m+2)x + 2 = 0 \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} y = 2x - m \\ x(2x - m) + 2 = 2x \end{cases}$$

إذن عدد حلول النظمة هو عدد حلول المعادلة :

$$2x^2 - (m+2)x + 2 = 0$$

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = (m+2)^2 - 16$

$$= (m+2-4)(m+2+4) = (m-2)(m+6)$$

ومنه :

• إذا كان $m \in]-\infty, -6[\cup]2, +\infty[$ فإن $\Delta > 0$

وبالتالي فإن النظمة تقبل حلين مختلفين.

• إذا كان $m = -6$ أو $m = 2$ فإن $\Delta = 0$

وبالتالي فإن النظمة تقبل حلا وحيدا.

• إذا كان $m \in]-6, 2[$ فإن $\Delta < 0$

وبالتالي فإن النظمة لا تقبل أي حل.

• ب حل النظمة من أجل $m = 3$

النظمة في هذه الحالة تقبل حلين مختلفين .

$$\begin{cases} xy + 2 = 2x \\ 2x - y = 3 \end{cases} \text{ النظمة تكافئ}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \text{ أي :}$$

$$S = \{(\ln 2, 0)\} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} \ln x \ln y + 2 = \ln x^2 \\ \ln\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases} \quad \text{ب • حل النظام}$$

مجموعة تعريف هذه النظام هي $(\mathbb{R}^{+*})^2$

ولدينا لكل (x, y) من $(\mathbb{R}^{+*})^2$ ، هذه النظام تكافئ :

$$\begin{cases} \ln x \ln y + 2 = 2 \ln |x| \\ \ln x^2 - \ln y = 3 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

وحسب نتيجة السؤال 1 • فإن هذه النظام تكافئ :

$$\begin{cases} \ln x = \frac{1}{2} \\ \ln y = -2 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} \ln x = 2 \\ \ln y = 1 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$S = \{(e^2, e); (\sqrt{e}, \frac{1}{e^2})\} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 2 \quad \text{أو} \quad x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أي :}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{أي :}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه النظام هي :

$$S = \{(2, 1); (\frac{1}{2}, -2)\} \quad \text{2 • أ • حل النظام}$$

$$\begin{cases} e^x \cdot e^y + 2 = 2e^x \\ 2e^x - e^y = 3 \end{cases} \quad \text{لكل } (x, y) \text{ من } \mathbb{R}^2, \text{ هذه النظام تكافئ :}$$

(ضربنا طرفي المعادلة في e^x)

وحسب نتيجة السؤال السابق فإن النظام تكافئ :

$$\begin{cases} e^x = \frac{1}{2} \\ e^y = -2 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} e^x = 2 \\ e^y = 1 \end{cases}$$

$$\text{أي :} \quad \begin{cases} x = \ln 2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{(النظام لا حل لها)}$$

تمارين 5 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب مشتقتها في كل من الحالات التالية :

$$f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} \quad \text{3} \quad f : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}} \quad \text{2} \quad f : x \mapsto \frac{e^x}{x} \quad \text{1}$$

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right) \quad \text{5} \quad f : x \mapsto e^{\sin x} \quad \text{4}$$

الحل

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R} - \{1\}$ ولدينا لكل x من

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x}{x-1}} + (x-1) \cdot \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} : \mathbb{R} - \{1\} \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{1}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} = \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) e^{\frac{x}{x-1}} \\ &= \left(\frac{x-1-1}{x-1}\right) e^{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}} \end{aligned}$$

$$f : x \mapsto e^{\sin x} \quad \text{4}$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (\cos x) e^{\sin x}$$

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{x} \quad \text{1}$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^*$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$f : x \mapsto x^3 e^{\frac{1}{x}} \quad \text{2}$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^*$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= x(3x-1) e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$f : x \mapsto (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} \quad \text{3}$$

$$\text{إذن : } D_f =]\ln 2, +\infty[$$

وبما أن $e^x - 2 > 0$ و $e^x + 2 > 0$ لكل x من D_f

$$f(x) = \ln(e^x - 2) - \ln(e^x + 2) \quad \text{فإن :}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - 2)'}{e^x - 2} - \frac{(e^x + 2)'}{e^x + 2} \quad \text{وبالتالي فإن :} \\ &= \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{e^x}{e^x + 2} = \frac{e^{2x} + 2e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x)^2 - 4} \\ &= \frac{4e^x}{e^{2x} - 4} \end{aligned}$$

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2}\right) \quad (5)$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي :

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{e^x - 2}{e^x + 2} > 0 \text{ و } e^x + 2 \neq 0 \right\}$$

وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x + 2 > 0$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - 2 > 0 \right\} \quad \text{فإن :}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / e^x > 2 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R} / x > \ln 2 \}$$

تمرين 6 :

حدد مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب مشتقتها في كل من الحالات التالية

$$f : x \mapsto x^{\ln x} \quad (4)$$

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$f : x \mapsto x^x \quad (2)$$

$$f : x \mapsto 2^x \quad (1)$$

الحل

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^{++}$

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{ولدينا لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^{++} :$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' e^{\frac{\ln x}{x}} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x - \ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$f : x \mapsto x^{\ln x} \quad (4)$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي : $\mathbb{R}^{++}$

$$f(x) = e^{\ln x \ln x} = e^{(\ln x)^2} \quad \text{ولدينا لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^{++} :$$

$$f'(x) = [(\ln x)^2]' e^{(\ln x)^2} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$= 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{(\ln x)^2} = \frac{2 \ln x}{x} e^{(\ln x)^2}$$

$$f : x \mapsto 2^x \quad (1)$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^{++}$

$$f(x) = e^{x \ln 2} \quad \text{ولدينا لكل } x \text{ من } \mathbb{R}^{++} :$$

$$f'(x) = (x \ln 2)' e^{x \ln 2} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$= (\ln 2) e^{x \ln 2} = (\ln 2) \cdot 2^x$$

$$f : x \mapsto x^x \quad (2)$$

مجموعة تعريف هذه الدالة هي $\mathbb{R}^{++}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}^{++}$:

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = (x \ln x)' e^{x \ln x} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

$$= \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) e^{x \ln x} = (1 + \ln x) x^x$$

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

تمرين 7 :

في كل من الحالات التالية، أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال I :

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \mapsto (x^3 + x) e^{x^4 + 2x^2 - 1} \\ I = \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \mapsto x e^{-x^2} \\ I = \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \mapsto x e^{x^2} \\ I = \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x} \\ I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \mapsto \sin 2x \cdot e^{\cos 2x} \\ I = \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \\ I =]-\infty, 1[\end{array} \right. \quad (4)$$

الحل

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \quad (4)$$

$$f(x) = -\left(\frac{1}{x-1}\right)' e^{\frac{1}{x-1}} :]-\infty, 1[\text{ من } x \text{ لكل}$$

إذن دالة أصلية للدالة f على $] -\infty, 1[$ هي الدالة $x \mapsto -e^{\frac{1}{x-1}}$

$$f : x \mapsto \sin 2x \cdot e^{\cos 2x} \quad (5)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(\cos 2x)' e^{\cos 2x} : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{\cos 2x}$

$$f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x} \quad (6)$$

$$f(x) = (\tan x)' e^{\tan x} : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ من } x \text{ لكل}$$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ هي الدالة :

$$x \mapsto e^{\tan x}$$

$$f : x \mapsto x e^{x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2)' e^{x^2} : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2} e^{x^2}$

$$f : x \mapsto x e^{-x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(-x^2)' e^{-x^2} : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

$$f : x \mapsto (x^3 + x) e^{x^4 + 2x^2 - 1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^4 + 2x^2 - 1)' e^{x^4 + 2x^2 - 1} : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

إذن دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{4} e^{x^4 + 2x^2 - 1}$

تمارين 8 :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+4}}{x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x} \quad (4)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+4}}{x} = +\infty : \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x} \quad (4) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{e^{4x} - 1}{4x} : \text{ لدينا}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{e^t - 1}{t} \quad (t = 4x \text{ وضعنا})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 : \text{ وبما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x} = 4 : \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} \quad (5) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} : \text{ لدينا}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} \quad (1) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 : \text{ نعلم أن}$$

وبما أن : $e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty : \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x} \quad (2) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 : \text{ نعلم أن}$$

وبما أن : $x e^x < 0$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x} = -\infty : \text{ فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+4}}{x} \quad (3) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot e^4 : \text{ لدينا}$$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ و $e^4 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad (t = \frac{1}{x} \text{ وضعنا})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad \text{حساب 6}$$

تمارين 9 :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \quad \text{4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad \text{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x \quad \text{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \quad \text{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) \quad \text{7} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} \quad \text{6} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} \quad \text{5}$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} \quad \text{حساب 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x} e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} e^{-x} = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} \quad \text{حساب 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} - \frac{1}{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \quad \text{حساب 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} \quad \text{نعلم أن :}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x \quad \text{حساب 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x + \frac{1}{x} e^x \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot e^x = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} \quad \text{حساب 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \sqrt{x} \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \quad \text{حساب 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} (1 - e^{\frac{-1}{x^2+x}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+x} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{e^{\frac{-1}{x^2+x}} - 1}{\frac{-1}{x^2+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x^2+x}} - 1}{\frac{-1}{x^2+x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = 1 \quad \text{فإن :}$$

$$(t = \sqrt{x} \text{ وضعنا}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\frac{t}{2}} \right]^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = +\infty \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) \quad \text{حساب (7)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} (1 - e^{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}) \quad \text{لدينا :}$$

تمارين 10 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$3^x = -e + \ln 2 \quad (3)$$

$$3^{2x} = 7^x \quad (2)$$

$$5^x = 3 \quad (1)$$

الحل

$$x(2\ln 3 - \ln 7) = 0 \quad \text{أي :} \quad x = 0$$

$$S = \{0\} \quad \text{إذن :}$$

$$3^x = -e + \ln 2 \quad \text{حل المعادلة (3)}$$

مجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة الفارغة

لأن $(-e + \ln 2) < 0$ و $3^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

$$5^x = 3 \quad \text{حل المعادلة (1)}$$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ : $x \ln 5 = \ln 3$

$$\text{أي :} \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 5} \quad \text{إذن :} \quad S = \left\{ \log_5 3 \right\}$$

$$3^{2x} = 7^x \quad \text{حل المعادلة (2)}$$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ : $2x \ln 3 = x \ln 7$

تمارين 11 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0 \quad (2)$$

$$9^x - 3^{x+1} - 10 = 0 \quad (4)$$

$$7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}\right) \quad (6)$$

$$10^{6x} - 10^{3x} - 2 = 0 \quad (1)$$

$$2^{x+1} + 4^x - 15 = 0 \quad (3)$$

$$3^x - 11.9^{\frac{x}{4}} + 18 = 0 \quad (5)$$

الحل

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0 \quad \text{حل المعادلة (2)}$$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ :

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0 \quad \text{أي :}$$

وبما أن حلي المعادلة $t^2 - 3t - 4 = 0$ هما -1 و 4

فإن المعادلة تكافئ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ ، لأن المعادلة :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = -1 \quad \text{لا حل لها.}$$

$$10^{6x} - 10^{3x} - 2 = 0 \quad \text{حل المعادلة (1)}$$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ : $(10^{3x})^2 - 10^{3x} - 2 = 0$

وبما أن حلي المعادلة $t^2 - t - 2 = 0$ هما -1 و 2

فإن المعادلة تكافئ : $10^{3x} = 2$ أو $10^{3x} = -1$

أي : $10^{3x} = 2$ (لأن المعادلة $10^{3x} = -1$ لا حل لها)

$$\text{أي :} \quad 3x = \log 2$$

$$\text{أي :} \quad x = \frac{\log 2}{3}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $S = \left\{ \frac{\log 2}{3} \right\}$

أي : $(3^{\frac{x}{2}})^2 - 11 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 18 = 0$

وبما أن : $t = 9$ أو $t = 2 \iff t^2 - 11t + 18 = 0$

فإن المعادلة تكافئ : $3^{\frac{x}{2}} = 9$ أو $3^{\frac{x}{2}} = 2$

أي : $3^{\frac{x}{2}} = 3^2$ أو $3^{\frac{x}{2}} = 2$

أي : $\frac{x}{2} = 2$ أو $\frac{x}{2} = \log_3 2$

أي : $x = 4$ أو $x = 2 \log_3 2$

وبالتالي فإن : $S = \{2 \log_3 2, 4\}$

6 حل المعادلة : $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1})$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ :

$7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1})$

أي : $7^{x+\frac{1}{3}}(7-2) = 5^{3x-1}(2+5)$

أي : $5 \cdot 7^{x+\frac{1}{3}} = 7 \cdot 5^{3x-1}$

أي : $\frac{7^{x+\frac{1}{3}}}{7} = \frac{5^{3x-1}}{5}$

أي : $7^{x-\frac{2}{3}} = 5^{3x-2}$

أي : $(x - \frac{2}{3}) \ln 7 = (3x - 2) \ln 5$

أي : $x(\ln 7 - 3 \ln 5) = \frac{2}{3} \ln 7 - 2 \ln 5$

أي : $x = \frac{\frac{2}{3} \ln 7 - 2 \ln 5}{\ln 7 - 3 \ln 5}$ أي : $x = \frac{2(\ln 7 - 3 \ln 5)}{3(\ln 7 - 3 \ln 5)}$

أي : $x = \frac{2}{3}$ إذن : $S = \{\frac{2}{3}\}$

أي : $x \ln \frac{1}{2} = \ln 4$ أي : $-x \ln 2 = 2 \ln 2$

أي : $x = -2$ إذن : $S = \{-2\}$

3 حل المعادلة : $2^{x+1} + 4^x - 15 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ : $2 \cdot 2^x + (2^2)^x - 15 = 0$

أي : $(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 15 = 0$

وبما أن : $t = -5$ أو $t = 3 \iff t^2 + 2t - 15 = 0$

فإن المعادلة تكافئ : $2^x = 3$ أو $2^x = -5$

أي : $2^x = 3$

أي : $x \ln 2 = \ln 3$

وبالتالي فإن : $S = \{\frac{\ln 3}{\ln 2}\}$

4 حل المعادلة : $9^x - 3^{x+1} - 10 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ : $(3^2)^x - 3 \cdot 3^x - 10 = 0$

أي : $(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - 10 = 0$

وبما أن : $t^2 - 3t - 10 = (t+2)(t-5)$

فإن المعادلة تكافئ : $3^x = 5$ أو $3^x = -2$

أي : $3^x = 5$

أي : $x \ln 3 = \ln 5$ أي : $x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$

وبالتالي فإن : $S = \{\frac{\ln 5}{\ln 3}\}$

5 حل المعادلة : $3^x - 11 \cdot 9^{\frac{x}{4}} + 18 = 0$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، هذه المعادلة تكافئ : $3^x - 11 \cdot (3^2)^{\frac{x}{4}} + 18 = 0$

تمارين 12 :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $f(x) = (x-1)e^x$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

3 اعط جدول تغيرات الدالة f

4 أدرس تقعر المنحنى (C_f)

5 حدد نقطة تقاطع (C_f) مع محور الأفاصل.

6 أرسم (C_f) (خذ : $\frac{2}{e} \simeq 0,7$)

الحل

لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$
 إشارة $f''(x)$ هي إشارة : $(x+1)$
 ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقع (C_f) :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
تقع (C_f)			

الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في العدد -1

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها -1
 وأرتوبها $f(-1)$ أي : $-\frac{2}{e}$

5 تحديد E

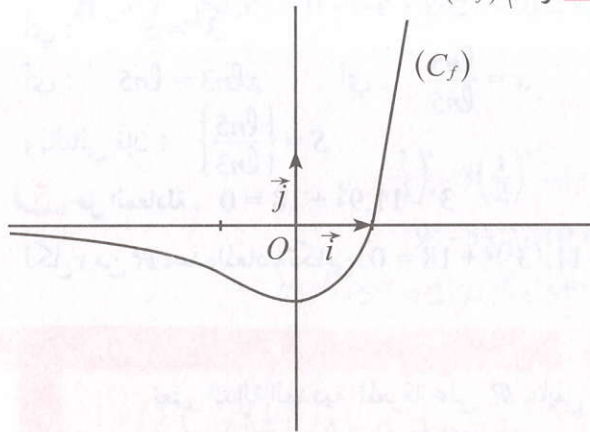
لذلك نحل في D_f المعادلة : $f(x) = 0$

هذه المعادلة تكافئ $(x-1)e^x = 0$

أي : $x-1=0$ (لأن $e^x \neq 0$) أي : $x=1$

إذن محور الأفاصيل يقطع (C_f) في النقطة $E(1;0)$

6 رسم (C_f)



1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x - e^x = 0$

لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

2 دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا أفقيا معادلته $y=0$ أي محور الأفاصيل.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \cdot e^x = +\infty$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

إذن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب.

3 جدول تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x = xe^x$$

وبما أن $e^x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

4 دراسة تقع (C_f)

تمارين 13 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمائلي : $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1$ وليكن (C) منحنها في معلم

متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أ. أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب. أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

2 بين أن $f'(x) = -xe^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم اعط جدول تغيرات الدالة f

3 أ. حدد نقطة انعطاف المنحنى (C) ب. أرسم المنحنى (C)

الحل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	-1

3 • أ تحديد نقطة الانعطاف

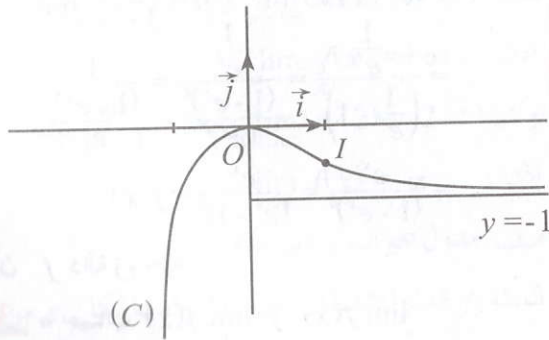
لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$
إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x-1$ ، ومنه الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f''(x)$ وتقرر المنحنى (C) :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
تقرر (C_f)			

الدالة f'' تنعدم مع تغيير الإشارة في 1

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها 1 وأرتوبها $f(1)$ أي : $\frac{2}{e} - 1$

ب • رسم (C)



1 • أ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x} - 1$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + e^{-x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + e^{-x} - 1$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

(لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$) فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

ب • دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ ، إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$

مقاربا أفقيا معادلته $y = -1$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} e^{-x} - \frac{1}{x} = +\infty$

لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

إذن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرتايب.

2 • حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x}$$

• جدول تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(-x)$ ، ومنه جدول تغيرات الدالة f :

تمارين 14 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

1 حدد D_f ثم احسب $f(\ln 2)$ و $f(2\ln 2)$

2 بين أن f دالة زوجية

3 أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

4 أحسب $f'(x)$ لكل x من D_f ثم تحقق من أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - e^x$

5 إعط جدول تغيرات f على D_f

6 أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

7 أرسم (C_f)