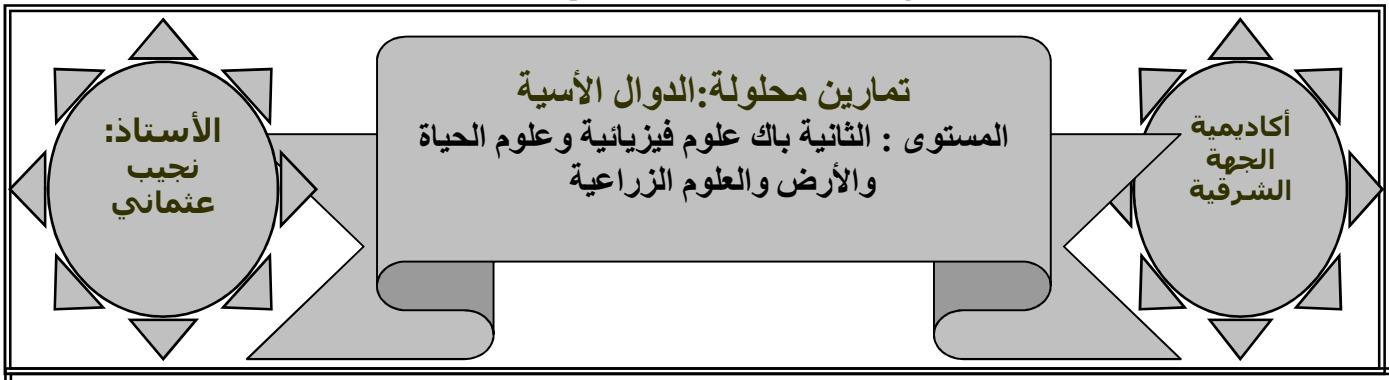
هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma



تمرين1: ليكن a عددا حقيقيا, و b عددا من $\mathbb{R}^{*+}$ بسط ما يلي :

$$A=e^{\ln(b)}-\ln\left(2e^{b}\right)-\ln\left(\frac{e}{2}\right) \quad \text{و} \quad B=\frac{\left(e^{a}\right)^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}}$$

نضع: $f(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}$ أحسب $f(2\ln 3)$

أجوبة :

$$A=e^{\ln(b)}-\ln\left(2e^{b}\right)-\ln\left(\frac{e}{2}\right)=b-\ln 2-\ln\left(e^{b}\right)-\ln e+\ln 2$$

$$A=b-\ln 2-b-1+\ln 2=-1$$

$$B=\frac{\left(e^{a}\right)^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}}=\frac{e^{5a}\times e^{3-a}}{e^{2\left(1+\frac{3}{2}a\right)}}=\frac{e^{5a+3-a}}{e^{2+3a}}$$

$$B=\frac{e^{4a+3}}{e^{2+3a}}=e^{4a+3-2-3a}=e^{a+1}$$

$$f(2\ln 3)=e^{2\ln 3}-2e^{\frac{2\ln 3}{2}}=e^{\ln 3^{2}}-2e^{\ln 3}=3^{2}-2\times 3=3$$

تمرين2: بسط ما يلي: $A=e^{-x}\times e^{2x}$

$$B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4} \quad , \quad C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right) \quad , \quad D=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}}$$

أجوبة :

$$A=e^{-x}\times e^{2x}=e^{-x+2x}=e^{x}$$

$$B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4}=e^{2(2-x)}\times e^{3x-4}=e^{4-2x+3x-4}=e^{x}$$

$$C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}=\left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^{2x\times\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^{x}\times e^{-x}=e^{x+(-x)}=e^{0}=1$$

$$D=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}}=\frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}}=\frac{e^{5x}}{e^{4x}}=e^{5x-4x}=e^{x}$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right)$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)$$

$$E=e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2x}+e^{2x}+e^{-2x}\right)=e^{2x}\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)$$

$$E=2e^{4x}+2$$

تمرين3: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$$f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^{2}-2x}} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{3x-1}{\left(e^{x}\right)^{2}-1}$$

أجوبة : $f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^{2}-2x}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\,x^{2}-2x\neq 0\right\}$

$x^{2}-2x=0$ يعني $x(x-2)=0$ يعني $x=0$ أو $x-2=0$

يعني $x=0$ أو $x=2$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0,2\}$

$$g(x)=\frac{3x-1}{\left(e^{x}\right)^{2}-1}$$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(e^{x}\right)^{2}-1\neq 0\right\}$

$\left(e^{x}\right)^{2}-1^{2}=0$ يعني $\left(e^{x}\right)^{2}-1=0$

يعني $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)=0$ يعني $e^{x}+1=0$ او $e^{x}-1=0$

يعني $e^{x}=-1$ او $e^{x}=1$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\,e^{x}>0$ اذن المعادلة :

$e^{x}=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$e^{x}=1$ يعني $x=\ln 1$ يعني $x=0$ ومنه : $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$e^{2x}-5e^{x}+6=0 \quad (3 \quad \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1} \quad (2 \quad e^{1-x}\times e^{2x}=e \quad (1$$

أجوبة :1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e \iff e^{2x+1-x}=e^{1}$

$e^{x+1}=e^{1} \iff x+1=1 \iff x=0$

ومنه : $S=\{0\}$

2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1} \iff e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$(2-x)-(1+2x)=x-1 \iff e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$x=\frac{1}{2} \iff -4x=-2 \iff 2-x-1-2x=x-1 \iff$

ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) $\left(e^{x}\right)^{2}-5e^{x}+6=0 \iff e^{2x}-5e^{x}+6=0$

نضع : $e^{x}=X$ والمعادلة تصبح : $X^{2}-5X+6=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{5+1}{2\times 1}$ و $X_2=\frac{5-1}{2\times 1}$ يعني $X_1=3$ و $X_2=2$

يعني $e^{x_1}=3$ و $e^{x_2}=2$ يعني $x_1=\ln 3$ و $x_2=\ln 2$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ومنه : $S=\{\ln 2,\ln 3\}$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\frac{1}{e^x}$ 2) $\frac{1}{e^{x+1}}\geq e^{1-x^2}$

أجوبة :1)

$e^{-3-x+1+2x}>e^{-x} \Leftrightarrow e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\frac{1}{e^x}$

$x>1 \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow -3-x+1+2x>-x \Leftrightarrow$

ومنه : $S=]1,+\infty[$

2) $x^2-x-2\geq 0 \Leftrightarrow -1-x\geq 1-x^2 \Leftrightarrow e^{-1-x}\geq e^{1-x^2}$

$\Delta=b^2-4ac=1+8=9>0$

اذن تقبل جذرين هما:

$x_1=\frac{1+3}{2\times 1}$ و $x_2=\frac{1-3}{2\times 1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=-1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x2-x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه : $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$

تمرين6: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية:

1) $(S_1)\begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ e^x+e^y=3\end{cases}$ 2) $(S_2)\begin{cases}e^xe^y=10\\ \frac{e^x}{e^y}=\frac{2}{5}\end{cases}$

أجوبة : 1)

$(S_1)\begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ e^x+e^y=3\end{cases}$

$\begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ -2e^x-2e^y=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ e^x+e^y=3\end{cases}$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$2e^x+3e^y-2e^x-2e^y=8-6$ يعني $e^y=2$ يعني

$y=\ln 2$

وبعويض y بقيمتها في المعادلة 2 نجد : $e^x+e^{\ln 2}=3$

يعني $e^x+2=3$ يعني $e^x=1$ يعني $x=\ln 1=0$

ومنه : $S=\{(0,\ln 2)\}$

2) $(S_2)\begin{cases}e^xe^y=10\\ \frac{e^x}{e^y}=\frac{2}{5}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}e^{x+y}=10\\ e^{x-y}=\frac{2}{5}\end{cases}$

يعني $\begin{cases}x+y=\ln(10)\\ x-y=\ln\left(\frac{2}{5}\right)\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x+y=\ln(2\times 5)\\ x-y=\ln\left(\frac{2}{5}\right)\end{cases}$

يعني $\begin{cases}x+y=\ln 2+\ln 5\\ x-y=\ln 2-\ln 5\end{cases}$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد : $2x=2\ln 2$

يعني $x=l\,n\,2$

وبعويض x بقيمتها في المعادلة 1 نجد :

$l\,n\,2+y=\ln 2+\ln 5$

يعني $y=\ln 5$ ومنه : $S=\{(l\,n\,2,\ln 5)\}$

تمرين7: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}$

أجوبة : 1)

لدينا. $(\forall x\in\mathbb{R});(2x-1)e^x=2(xe^x)-e^x$

و بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ فان

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x=0$

2) لدينا. $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\frac{e^x+3}{x}=\frac{e^x}{x}+\frac{3}{x}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$ فان: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3}{x}=+\infty$

.

3) $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\frac{e^x+3x}{x^3}=\frac{e^x}{x^3}+\frac{3}{x^2}$

بما أن. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ فان: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}$

تمرين8: أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-e^x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^3-e^x$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x=X$) 13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}$ 14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x$ 16) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-4x^3)e^x$ 17) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)e^{2x}$ 18) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

19) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$ 20) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

21) $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$ 22) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$ 23) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$

(استعمال المشتقة)

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

أجوبة : 1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+2}=\frac{0+1}{0+2}=\frac{1}{2}$ لأن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$

2) $\lim_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}-x+1=+\infty$ اذن :

$\lim_{x\to-\infty}e^{-x+1}=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}e^{-x+1}$ لدينا : $\lim_{x\to+\infty}-x+1=-\infty$ اذن :

$\lim_{x\to+\infty}e^{-x+1}=0$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$

4) $\lim_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}$ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ اذن :

$\lim_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}=+\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ لدينا :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x^3+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}=e^0=1$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ أي $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

7) $\lim_{x\to+\infty}2x-e^x=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ أي $\lim_{x\to+\infty}2-\frac{e^x}{x}=-\infty$

8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$

نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=+\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{3}{x}}$

نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{x}}=1$ اذن :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}=+\infty$

10) $\lim_{x\to+\infty}3x^3-e^x=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(3-\frac{e^x}{x^3}\right)$

نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ اذن $\lim_{x\to+\infty}3-\frac{e^x}{x^3}=-\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}3x^3-e^x=-\infty$

11) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{3x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{3}{x^2}=+\infty$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$

12) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x=X$)

نضع $2x=X$ يعني $x=\frac{X}{2}$

$X\to+\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3}=\lim_{X\to+\infty}8\frac{e^X}{X^3}$

نعلم أن : $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^3}=+\infty$ اذن : $\lim_{X\to+\infty}8\frac{e^X}{X^3}=+\infty$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=+\infty$

13) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}$ نضع $3x=X$ يعني $x=\frac{X}{3}$

$X\to+\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{\frac{X}{3}}=\lim_{X\to+\infty}3\frac{e^X}{X}$

نعلم أن : $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ اذن : $\lim_{X\to+\infty}3\frac{e^X}{X}=+\infty$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}=+\infty$

14) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$

نعلم حسب سؤال سابق أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=+\infty$ ولدينا

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=1$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}=+\infty$

15) $\lim_{x\to-\infty}(3x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}3xe^x-e^x$

نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0^+$ و $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ اذن :

$\lim_{x\to-\infty}(3x-1)e^x=0$

16) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x=\lim_{x\to-\infty}x^5e^x-4x^3e^x$

نعلم أن : $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ اذن:

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x=0-0=0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

17) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

نضع $\frac{1}{x}=X$ $\quad X\to-\infty\Leftrightarrow x\to 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$

18) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{2x}-2xe^{2x}=0-2\times 0=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

نضع $2x=X$ يعني $x=\frac{X}{2}$ و $X\to 0\Leftrightarrow x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{3\frac{X}{2}}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{2}{3}\frac{e^X-1}{X}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$

لأن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ نضع $\frac{1}{x}=X$ اذن : $x=\frac{1}{X}$

$X\to 0\Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{X\to 0}\frac{1}{X}\left(e^X-1\right)=\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{X}=1$

21) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$

نضع $1-x=X$ يعني $x=1-X$ و $X\to 0\Leftrightarrow x\to 1$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim\limits_{X\to 0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$

لأن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

نضع $-x=X$ يعني $x=-X$ و $X\to 0\Leftrightarrow x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim\limits_{X\to 0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$ **لأن :**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$ (استعمال المشتقة)

نضع : $f(x)=e^{x+1}$ اذن : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

و $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ اذن : $f'(0)=e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$

تمرين9: لنحسب مشتقة الدالة $f:x\mapsto e^{x^2-x}$

الجواب : لدينا الدالة $u:x\mapsto x^2-x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=\left(x^2-x\right)'e^{x^2-x}$

$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$

تمرين10: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية: 1) $f(x)=e^{3x}+e^x$

2) $f(x)=2x-e^{-x}$ 3) $f(x)=x^2e^{-x}$ 4) $f(x)=(2x-1)\left(e^x-1\right)$

5) $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$ 6) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$ 7) $f(x)=e^{x\ln x}$

8) $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$ 9) $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

أجوبة 1: $f(x)=e^{3x}+e^x$ اذن: $f'(x)=\left(e^{3x}+e^x\right)'$

$f'(x)=\left(e^{3x}\right)'+\left(e^x\right)'=(3x)'e^{3x}+e^x=3e^{3x}+e^x$

2) $f(x)=2x-e^{-x}$

$f'(x)=\left(2x-e^{-x}\right)'=(2x)'-\left(e^{-x}\right)'=2-(-x)'e^{-x}=2+e^{-x}$

3) $f(x)=x^2e^{-x}$

$f'(x)=\left(x^2e^{-x}\right)'=\left(x^2\right)'e^{-x}+x^2\left(e^{-x}\right)'=2xe^{-x}+x^2\times(-x)'e^{-x}$

$f'(x)=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$

4) $f(x)=(2x-1)\left(e^x-1\right)$

$f'(x)=\left((2x-1)\left(e^x-1\right)\right)'=(2x-1)'\left(e^x-1\right)+(2x-1)\left(e^x-1\right)'$

$f'(x)=2\left(e^x-1\right)+(2x-1)e^x=2e^x-2+2xe^x-e^x=e^x-2+2xe^x$

5) $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$

$f'(x)=\left((x-1)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=((x-1))'e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$

$f'(x)=1e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+(x-1)\frac{1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2}\right)$

6) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$

$f'(x)=\left(\sqrt{e^{2x}-e^x}\right)'=\frac{\left(e^{2x}-e^x\right)'}{2\sqrt{e^{2x}-e^x}}=\frac{2e^{2x}-e^x}{2\sqrt{e^{2x}-e^x}}$

7) $f(x)=e^{x\ln x}$

$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=(x\ln x)'e^{x\ln x}=\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)e^{x\ln x}$

$f'(x)=\left(1\ln x+x\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}=(\ln x+1)e^{x\ln x}$

8) $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$f'(x)=\left(\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}\right)'=\left(\left(e^x-4\right)\right)'\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{\left(e^x-1\right)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x\left(e^x-1\right)+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

9) $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$$f'(x)=\left(\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'=\left(\frac{2}{(x-1)^2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'$$

$$f'(x)=\left(2(x-1)^{-2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x)=-4(x-1)^{-3}\left((x-1)\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{-4}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^4}\right)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

تمرين11: حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I

1. $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$
2. $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$
3. $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$
4. $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin x e^{\cos x}$
5. $I=]0;+\infty[\ \ f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

أجوبة 1: $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

$$f(x)=2e^{3x}-e^{-x}=\frac{2}{3}(3x)'e^{3x}+(-x)'e^{-x}$$

اذن : $F(x)=\frac{2}{3}e^{3x}+e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

2) $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

اذن : $F(x)=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2x}-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

3) $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$

$$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$$

اذن : $F(x)=\frac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\frac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

4) $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin x e^{\cos x}$

$$f(x)=\sin x e^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$$

اذن : $F(x)=e^{\cos x}$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

5) $I=]0;+\infty[\ \ f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$$

اذن : $F(x)=\ln\left|e^x-x\right|$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

تمرين12: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=e^{2x}-2e^x$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
2. حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

أجوبة 1: $f(x)=e^{2x}-2e^x$

$D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-2e^x=0$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-2\right)=+\infty$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$$f'(x)=\left(e^{2x}-2e^x\right)'=2e^{2x}-2e^x=2e^x\left(e^x-1\right)$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة e^x-1

$x>0\Leftrightarrow x>\ln 1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$

اذن : $x>0\Leftrightarrow e^x-1>0$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2) $f(x)=e^{2x}-2e^x$

$$f(x)=e^{2x}-2e^x=\frac{1}{2}(2x)'e^{2x}-2\left(e^x\right)'$$

اذن : $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين13: أحسب $f'(x)$ في الحالات الأتية على المجال I

1. $f(x)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}};I=]0;+\infty[$
3. $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1};I=\mathbb{R}$

أجوبة 1: $f(x)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(e^{x^2-3x}\right)'=\left(x^2-3x\right)'e^{x^2-3x}=(2x-3)e^{x^2-3x}$$

2) $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}};I=]0;+\infty[$

$$f'(x)=\left((x-1)e^{\frac{1}{x}}\right)'=(x-1)'e^{\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$f'(x)=1e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}(x-1)\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

3) $f(x)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; $I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\frac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

تمرين14: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات الآتية:

1) $2^{x+1}=8^x$ 2) $3^x=12$ 3) $5\times2^x+2^{x+1}-336=0$

4) $2^{x-1}>4^x$ 5) $(0,5)^{2x}\geq(0,5)^{x+1}$

أجوبة 1: $2^{x+1}=8^x$ يعني $2^{x+1}=\left(2^3\right)^x$ يعني $2^{x+1}=2^{3x}$

يعني $x+1=3x$ يعني $1=2x$ يعني $x=\dfrac{1}{2}$ ومنه : $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $3^x=12$ يعني $x=\log_3 12$ ومنه : $S=\{\log_3 12\}$

3) $2^x-3\times2^1\times2^x-16=0$ يعني $2^x-3\times2^{x+1}-16=0$

نضع : $2^x=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-6X-16=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2+4\times1\times16=100>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\dfrac{6+10}{2\times1}=8$ و $X_2=\dfrac{6-10}{2\times1}=-2$ يعني $X_1=8$ و $X_2=-2$

$2^x=8$ يعني $x_1=\log_2 8$ و $2^x=-2$ ليس لها حل

يعني $x_1=\log_2 8$

$x_1=\log_2 2^3=3\log_2 2=3\times1=3$

ومنه : $S=\{3\}$

4) $2^{x-1}>4^x$ يعني $2^{x-1}>\left(2^2\right)^x$ يعني $2^{x-1}>2^{2x}$

يعني $x-1>2x$ يعني $-1>x$

ومنه : $S=]-\infty,-1[$

5) $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1}$ يعني $2x<x+1$ لأن : $0<0,5<1$

يعني $x<1$ ومنه $S=]-\infty,1[$

تمرين15: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $100^x+40=14\times10^x$

الجواب : $100^x+40=14\times10^x$ يعني

$\left(10^2\right)^x-14\times10^x+40=0$

يعني $10^{2x}-14\times10^x+40=0$ يعني

$\left(10^x\right)^2-14\times10^x+40=0$

نضع : $10^x=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-14X+40=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times40=36>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\dfrac{14+6}{2\times1}=10$ و $X_2=\dfrac{14-6}{2\times1}=4$ يعني $X_1=10$ و $X_2=4$

يعني $10^{x_1}=10$ و $10^{x_2}=4$ يعني $x_1=1$ و $x_2=\log_{10}4$

ومنه : $S=\{1,\log_{10}4\}$

تمرين16: لتكن f الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$f(x)=(x-1)e^x$

1. حدد D_f أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
4. أدرس تقعر (C)
5. أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x-e^x=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

مبيانيا : $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $-\infty$

2) $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'$

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة x

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}e^x$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا

في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) دراسة تقعر (C)

نحسب : $f''(x)=\left(xe^x\right)'=(x)'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x(1+x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $x+1$

$x+1=0$ يعني $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

ومنه

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

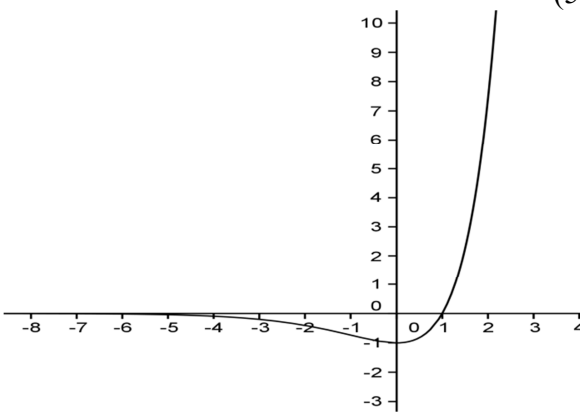
• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-1;+\infty[$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على المجال: $]-\infty,-1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

النقطة : $A(-1,-2e^{-1})$ نقطة انعطاف ل (C_f)

(5



تمرين17: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة المعرفة كالتالي: $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. حدد تغيرات f و أعط جدول التغيرات
3. تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$
4. حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي)

أجوبة 1: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^x+1\neq 0\}$

$e^x+1=0$ يعني $e^x=-1$ ليس لها حل لأن : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ e^x>0$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=+\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=-\infty$$

لأن : $\lim_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=3$

(2

$$f'(x)=\left(x-1+\frac{3}{e^x+1}\right)'=1-3\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1-3\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2+2e^x+1-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2-e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

اشارة : $f'(x)$ هي اشارة $\left(e^x\right)^2-e^x+1$

نضع : $e^x=X$ والمعادلة تصبح : $X^2-X+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

اذن هذه المعادلة ليس لها حل ومنه اشارتها هي اشارة 1 ومنه :

$\left(e^x\right)^2-e^x+1>0$

ومنه : $f'(x)>0$ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) نتحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$

$$f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}=x+2-3+\frac{3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2+\frac{-3\left(e^x+1\right)+3}{e^x+1}=x+2+\frac{-3e^x-3+3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) نعلم أن : $f(x)=x-1+\dfrac{3}{e^x+1}$ يعني $f(x)-(x-1)=\dfrac{3}{e^x+1}$

اذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x+1}=0$ ومنه :

$(\Delta)\ y=x-1$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا : $f(x)-(x-1)=\dfrac{3}{e^x+1}>0$ اذن (C_f) فوق $(\Delta)\ y=x-1$

نعلم أن : $f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$ يعني

$$f(x)-(x+2)=-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

اذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to-\infty}-\dfrac{3e^x}{e^x+1}=0$ ومنه :

$(D)\ y=x+2$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$

لدينا : $f(x)-(x+2)=-\dfrac{3e^x}{e^x+1}<0$ اذن (C_f) تحت $(D)\ y=x+2$

تمرين18: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$$

1. أحسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
4. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$
5. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
7. أحسب $f(2\ln 2)$ ثم أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1: $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}=+\infty$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

2) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(e^x-4)\sqrt{e^x-1}}{x}=\dfrac{(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(e^x-4)(e^x-1)}{x\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0^+}e^x-4=-3$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{e^x-1}=0^+$

.

اذن : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$

مبيانيا منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة $A(0;f(0))$ وموجه نحو الأسفل :

4) بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=\dfrac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)'=(e^x-4)'\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$

$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+(e^x-4)\dfrac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\dfrac{e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\dfrac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{2e^x(e^x-1)+e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\dfrac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5) اشارة $f'(x)$ هي اشارة e^x-2 لأن : $\dfrac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}}>0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$

$e^x-2>0$ يعني $e^x>2$ يعني $x>\ln 2$

$f(\ln 2)=\left(e^{\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{\ln 2}-1}=(2-4)\sqrt{2-1}=-2$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	-2	↗ $+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ و

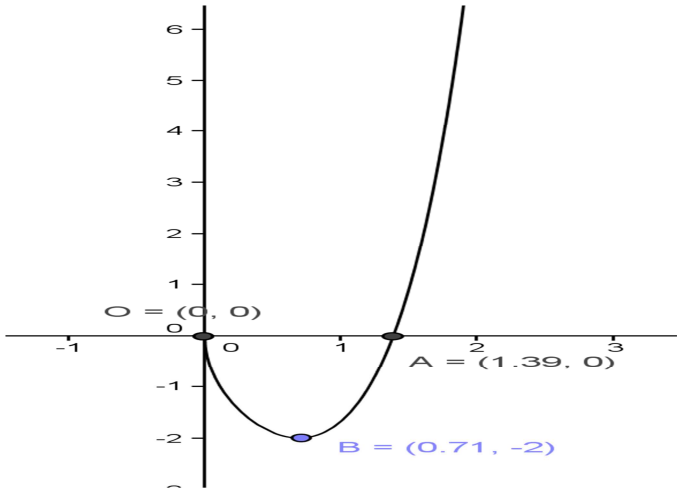
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

7) $f(\ln 2)=\left(e^{2\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln 2}-1}$

$f(\ln 2)=\left(e^{\ln 4}-4\right)\sqrt{e^{\ln 4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$



تمرين19: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
4. حدد $f^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

أجوبة :

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\}$

$1-e^{2x}>0$ يعني $1>e^{2x}$ يعني $e^0>e^{2x}$

يعني $0>2x$ يعني $x<0$

ومنه: $D_f=]-\infty,0[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\dfrac{0}{\sqrt{1-0}}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{\left(\dfrac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

2) $f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\dfrac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\dfrac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{2e^x\left(1-e^{2x}\right)+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$f'(x)=\frac{2e^{x}-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}=\frac{2e^{x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}>0$$

$\forall x\in\ ]-\infty,0[$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

3) f تزايدية قطعا على المجال $I=\ ]-\infty,0[$ ومتصلة وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال: $J=f(I)=f(]-\infty,0[)=]0;+\infty[$

4) $\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{e^{y}}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x\\y\in\ ]-\infty,0[\end{cases}$ يعني $\left(\dfrac{e^{y}}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^{2}=x^{2}$ يعني $\dfrac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^{2}$

$e^{2y}=x^{2}\left(1-e^{2y}\right)$ يعني $e^{2y}=x^{2}-x^{2}e^{2y}$

يعني $e^{2y}+x^{2}e^{2y}=x^{2}$

يعني $e^{2y}\left(1+x^{2}\right)=x^{2}$ يعني $e^{2y}=\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}$

يعني $2y=\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)$ يعني $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)$

يعني $y=\left(\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ $y=\ln\sqrt{\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}}$

ومنه : $\forall x\in\ ]0;+\infty[$ $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^{2}}{1+x^{2}}}$

تمرين20: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$.

1) أ . بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

ب . بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2) أ . بين أن $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $\left(O;\vec{i}\,\vec{j}\right)$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

الأجوبة : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) أ .

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=1$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$

التأويل الهندسي: $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

ب . $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\ln\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=+\infty$

2) أ . نبين أن $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=1-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)=1-\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}}\right)$$

$f(x)=1-\ln\left(e^{x}+1\right)+\ln\left(e^{x}\right)=1-\ln\left(e^{x}+1\right)+x$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}+1\right)$

ب . وجدنا أن : $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x}+1\right)$ اذن:

$f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ وبالتالي :

لمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .؟؟؟

ندرس اشارة : $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^{x}+1\right)$

نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}$ $e^{x}>0$

اذن : $e^{x}+1>1$ اذن : $\ln\left(e^{x}+1\right)>\ln 1$ اذن :

$\ln\left(e^{x}+1\right)>0$

اذن : $-\ln\left(e^{x}+1\right)<0$ وبالتالي : اذن (C_f) تحت $y=x+1$ (D)

3) أ . نبين أن $\forall x\in\mathbb{R},f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ ؟؟؟؟

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$f'(x)=\left(x+1-\ln\left(1+e^{x}\right)\right)'=1-\frac{\left(1+e^{x}\right)'}{1+e^{x}}=1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{1}{1+e^{x}}>0$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

ج . دراسة تقعر المنحنى (C) .

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^{x}}\right)'=-\frac{\left(1+e^{x}\right)'}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=-\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}<0$$

$\forall x\in\mathbb{R},$

تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على $\mathbb{R},$

ويمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

د . نبين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة

ينبغي تحديد أفصولها x_0 ؟؟؟

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$

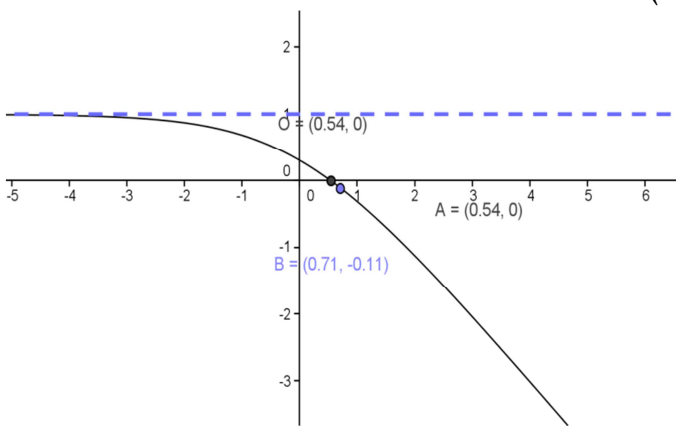
يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=1$ يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln e$

يعني $1+e^{-x}=e$ يعني $e^{-x}=e-1$ يعني $-x=\ln(e-1)$

يعني $x=-\ln(e-1)$ ومنه النقطة أفصولها هو :

$x_0=-\ln(e-1)$

4)



5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

f تزايدية قطعا على المجال $\mathbb{R}$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J=f(I)=f(\mathbb{R})=]-\infty;1[$

ب) $\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}$

$1-x=\ln\left(1+e^{-y}\right)$ يعني $\begin{cases}1-\ln\left(1+e^{-y}\right)=x\\y\in\mathbb{R}\end{cases}$

يعني $1+e^{-y}=e^{1-x}$

$-y=\ln\left(e^{1-x}-1\right)$ يعني $e^{-y}=e^{1-x}-1$

يعني $y=-\ln\left(e^{1-x}-1\right)$

ومنه : $\forall x\in\,]-\infty;1[\quad f^{-1}(x)=-\ln\left(e^{1-x}-1\right)$

تمرين21 للبحث والتثبيت ينجز بنفس طريقة التمرين السابق:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=3-\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ما هو التأويل الهندسي للنتائج المحصل عنها ؟

2) أ . بين أن

$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+3-\ln\left(1+e^{x}\right)$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $\left(O;\vec{i}\,\vec{j}\right)$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma