

مسألة رقم (1)

الجزء (1) : لنتك g الدالة بحيث : $g(x) = (x+1)e^x - 1$

(1) أحسب النهايتي $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ- يبي أنه $g'(x) = (x+2)e^x$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g

(3) أحسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) أ- أحسب النهايتي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرعيه اللانهايتي للمنحنى (C_f)

(2) أ- يبي أنه f متصلة في النقطة 0

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمينه و على يسار 0

(3) أ- يبي أنه $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)^2}$ لكل $x \in \mathbb{R}^*$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

(4) يبي أنه $\left[0, \frac{1}{\ln 2}\right] \Leftrightarrow f(x) < x \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{\ln 2}\right]$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$)

(5) أسسم المنحنى (C_f)

الجزء (3) : لنتك $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } u_0 = \frac{1}{2}$$

(1) يبي أنه $0 < u_n < \frac{1}{\ln 2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) يبي أنه $(u_n)_n$ متتالية تناقصية

(3) استنتج أنه $(u_n)_n$ متقاربة وحد نهايتها

مسألة رقم (2)

(I) لنتك g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

(1) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات g (1)

(2) أ- استنتج أنه $g(x) \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (0,5)

ب- استنتج أنه $e^{2x} - 2x \geq 1$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (0,25)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x}{e^{2x} - 2x}$

(1) يبي أنه مجموعة تعريف الدالة f هي $D = \mathbb{R}$ (0,5)

(2) أ- يبي أنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ أول هندسيا النتيجة (0,75)

ب- تحقق أنه $f(x) = \frac{1}{2\left(\frac{e^{2x}}{2x} - 1\right)}$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

أعط تأويلا هندسيا النتيجة (0,75)

(3) أ- يبي أنه $f'(x) = \frac{(1-2x)e^{2x}}{(e^{2x} - 2x)^2}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (0,5)

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f (0,5)

(4) أ- أكتب معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة $x_0 = 0$ (0,25)

ب- تحقق أنه $f(x) - x = \frac{-xg(x)}{e^{2x} - 2x}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (0,25)

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

(5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) (نأخذ $\frac{1}{2(e-1)} = 0,3$)

(III) لنتك $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ و } U_0 = -1$$

(1) يبي أنه $-1 \leq U_n \leq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (0,5)

(2) يبي أنه $(U_n)_n$ متتالية نزايدي (0,25)

(3) استنتج أنه المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحد نهايتها (0,5)

استدراكية 2008

(1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^{2x} - 2x$

(1) أحسب $g'(x)$ ثم أدرس منحنى تغيرات الدالة g

(2) استنتج أنه $g(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (لاحظ أنه $g(0) = 1$)

(2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$$

(1) أ- يبي أنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ب- تحقق أنه

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$$

ج- يبي أنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

(2) أ- تحقق أنه $1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$

$$\text{و أنه } f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

ب- أدرس الفرع اللانهايتي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- يبي أنه $f(x) - 2x \leq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$ و استنتج أنه المنحنى

(C_f) يوجد تحت المستقيم $y = 2x$ على $\mathbb{R}^+$

(3) أ- يبي أنه $f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$ لكل $x \in \mathbb{R}$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

(4) أسسم المنحنى (C_f) و المستقيم $y = 2x$ (D)