

الدوال الأسية

السلسلة 1

التمرين الأول :

في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لدالة عددية f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

علما أن (C_f) يقبل :

- فرعا شلجيميا باتجاه محور الأرتايب بجوار $-\infty$
 - محور الأرتايب مقاربا عموديا
 - المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقاربا مانلا بجوار $+\infty$
- (أنظر الشكل)

من خلال قراءتك للمبيان :

1. أ. حدد النهايات التالية :

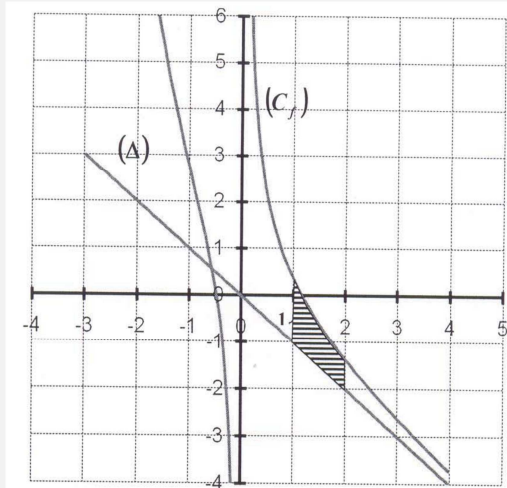
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

ب. اعط جدول تغيرات f على مجموعة تعريفها

ج. اعط إشارة $f(x) + x$ على المجال $]0, +\infty[$

د. اعط عدد حلول المعادلة $f(x) = -x$ على $\mathbb{R}^*$

2. أحسب مساحة الحيز المخدش في المبيان إذا علمت أن $f(x) = e^{-x} - x + \frac{1}{x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$



التمرين الثاني :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $g(x) = -xe^{-x} + 1$

(1) أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة g

(2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = x - 1 + (x + 1)e^{-x}$

و ليكن (C_f) منحنها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (يمكنك وضع $t = -x$)

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

(4) أ- بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f

(5) أدرس تقعر المنحنى (C_f) محددا نقاط انعطافه

(6) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0

ب- أنشئ (T) و (C_f) (نأخذ $e^{-1} \simeq 0,36$)

(7) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمتين اللذين معادلاتهم : $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 2$

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(1) بين أن $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

(2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية

(3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$. وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- (1) حدد D_f
- (2) أحسب نهايات f عند محدات D_f
- (3) أدرس تغيرات f و اعط جدول تغيراتها
- (4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)
- (5) بين أن النقطة $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)
- (6) أنشئ (C_f)
- (7) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$ و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = \ln 2$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة القياس 4cm)

الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = x + 2 - e^x$

- (1) أدرس تغيرات g على $[0, +\infty[$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- (2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0, +\infty[$
ب- تحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$
- (3) أدرس إشارة $g(x)$ على $[0, +\infty[$

الجزء الثاني

(1) أ- بين أن لكل x من $[0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

ب- استنتج تغيرات f على $[0, +\infty[$

(2) أ- بين أن لكل $x \geq 0$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة

(3) أ- بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

ب- اعط تآطير ل $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}

(4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0

$$(5) \text{ أ- بين أن لكل } x \text{ من } [0, +\infty[: \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1} = f(x) - x \text{ حيث } u(x) = e^x - xe^x - 1$$

ب- أدرس تغيرات الدالة u على $[0, +\infty[$ و استنتج إشارة $u(x)$ على $[0, +\infty[$

ج- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)

(6) أنشئ (C_f) و (T)

الجزء الثالث

(1) حدد دالة أصلية ل f على $[0, +\infty[$ (يمكنك استعمال الجزء الثاني السؤال (2))

(2) نرسم $\mathcal{D}$ الحيز المحصور بين (C_f) و (T) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

أحسب ب cm^2 المساحة $\mathcal{A}$ للحيز $\mathcal{D}$

$$(3) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}, \text{ نضع } v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

أ- أحسب v_0, v_1, v_2

ب- أول هندسيا v_n

ج- بين أن لكل $n \geq 2 : f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n+1)$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

التمرين الخامس :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = e^x - 2x + 2$

(1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- أدرس تغيرات g و استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل فرعاً شلجياً يتم تحديد اتجاهه بجوار

$-\infty$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)

(2) بين أن : $\frac{g(x)}{2e^x} = f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ و استنتج أن f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

(3) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1, 0[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

ب- حدد معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الألفصول 0.

ج- بين أن : $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم حدد زوج إحداثيات I نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

(4) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $2e^{-2} \simeq 0,27$ و $\ln 2 \simeq 0,7$)

(5) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 xe^{-x} dx = 1 - \frac{3}{e^2}$

(6) احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=2$.