



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + ع. فيزياء



الصفحة

درس : الدوال الأسية

**1. تقديم الدالة  $f(x) = \exp(x) = e^x$  (الأسية النبرية):**

تقديم الدالة الأسية النبرية :

$$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

**1. نشاط :** نعتبر الدالة العددية المعرفة ب:

$$x \mapsto f(x) = \ln(x)$$

• هل  $f$  تقابل من المجال  $I = ]0, +\infty[$  إلى مجال  $J$  ؟ علل جوابك مع تحديد  $J$ .**2. مفردات:**الدالة العكسية  $f^{-1}$  لـ  $f$  تسمى الدالة الأسية النبرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب:  $\exp$  أو  $e$ .

$$f^{-1} = \exp = e: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

ولهذا نكتب:

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$$

**3. تعريف و خاصية:**الدالة العددية المعرفة ب:  $f(x) = \ln(x)$  متصلة و تزايدية قطعاً على المجال  $]0, +\infty[$  و منه الدالة  $f(x) = \ln(x)$  تقابل من $]0, +\infty[$  إلى  $\mathbb{R}$ . الدالة العكسية  $f^{-1}$  لـ  $f$  تسمى الدالة الأسية النبرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب:  $\exp$  أو  $e$ .

$$f^{-1} = \exp = e: \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$$

الدالة الأسية معرفة كما يلي :

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$$

**4. ملحوظة :**

$$\exp(x) = e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{العلاقة التي تربط } f(x) = \ln(x) \text{ و } f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x \text{ هي :}$$

$$\forall x \in ]0, +\infty[ , \exp \circ \ln(x) = x \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = x : \text{ إذن } \forall x \in ]0, +\infty[ : f^{-1} \circ f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\text{لدينا : } \forall x \in \mathbb{R} : f \circ f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x : \text{ إذن } \forall x \in \mathbb{R} : \ln \circ \exp(x) = x \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = x$$

**5. كتابة جديدة :**

$$\text{نعلم أن : } \forall r \in \mathbb{Q}, r = \ln(e^r) \quad (1) \quad \text{إذن : } \forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = \exp(\ln(e^r))$$

ومنه نحصل على :  $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp(r) = e^r$ وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية  $x$  ومنه : نكتب  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$ **6. نتائج:**

| الدالة $f(x) = \exp(x) = e^x$                                   |          |                                                                         |          |
|-----------------------------------------------------------------|----------|-------------------------------------------------------------------------|----------|
| $\forall x > 0 : e^{\ln(x)} = x$                                | <b>5</b> | معرفة على $D_f = \mathbb{R}$                                            | <b>1</b> |
| $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$                       | <b>6</b> | متصلة على $D_f = \mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $D_f = \mathbb{R}$    | <b>2</b> |
| $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$ | <b>7</b> | تزايدية قطعاً على المجال $D_f = \mathbb{R}$                             | <b>3</b> |
| $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$ | <b>8</b> | $y = e^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases}$ | <b>4</b> |



## 7. أمثلة :

$$1. e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$2. e^{\ln(24)} = 24 \text{ و } \ln(e^{-13}) = -13 \text{ و } e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$$

$$3. e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x+1 = 6x-2 \text{ و } e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x+3 = 2x+7$$

8. إشارة  $e^x$  :

|       |           |           |
|-------|-----------|-----------|
| x     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $e^x$ |           | +         |

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0 \text{ (إشارة } e^x \text{ موجبة قطعا)}$$

## 9. تطبيق :

$$1. \text{ حدد مجموعة تعريف : } f(x) = \frac{2}{e^x} \text{ و } f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$2. \text{ حل المعادلة : } e^{2x} - e^{(x-1)} = 0$$

$$3. \text{ حل المتراجحة : } e^{2x} - e^{(x-1)} \leq 0$$

$$II. \text{ خاصيات } f(x) = \exp(x) = e^x$$

خاصيات جبرية :

## 1. خاصيات :

| مثال                                         | لكل $x$ من $\mathbb{R}$ و $r$ من $\mathbb{Q}$          | مثال                     | لكل $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| $(e^x)^3 = e^{3x}$                           | $(e^x)^r = e^{rx} \text{ (} r \in \mathbb{Q} \text{)}$ | $e^7 = e^4 \times e^3$   | $e^{a+b} = e^a \times e^b$    |
| $\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$      | $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$                        | $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ | $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$      |
| $\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$ | $\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$                     | $e^5 = \frac{e^7}{e^2}$  | $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$   |

2. برهان : ل :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ 

ليكن  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  نضع :  $A = e^{a+b}$  و  $B = e^a \times e^b$  .  
ومنه :

$$A = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln(A) = \ln(e^{a+b})$$

$$\Leftrightarrow \ln(A) = a+b \quad , \quad (1)$$

$$B = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a \times e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = a+b \quad , \quad (2)$$

حسب (1) و (2) نحصل على  $\ln(A) = \ln(B)$  إذن :  $A = B$  أي  $e^{a+b} = e^a \times e^b$  .

خلاصة :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ 

## 3. ملحوظة :

$$\text{الكتابة : } e^x \times e^x \times e^x = (e^x)^3 = e^{3x} \text{ و } e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$$\text{بصفة عامة : } \underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + ع. فيزياء



الصفحة

درس : الدوال الأسية

## III. مشتقة الدالة الأسية:

## 1. خاصية:

الدالة :  $f(x) = e^x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا :  $(e^x)' = e^x$  .  $\forall x \in \mathbb{R}$ بمأن الدالة  $f(x) = \ln(x)$  قابلة للاشتقاق على  $I = ]0, +\infty[$  . و دالتها المشتقة  $f'(x) = \frac{1}{x}$  لا تنعدم على هذا المجال فإن دالتهاالعكسية  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .لدينا :  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$ خلاصة :  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$ 

## 2. خاصية:

دالة  $u(x)$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $f(x) = e^{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و دالتها المشتقة تحقق ما يلي:

$$f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$$

■ تطبيق: أحسب الدالة المشتقة ل:  $f(x) = e^{5x^3+3x}$ 

$$f'(x) = [e^{5x^3+3x}]' = (5x^3 + 3x)' \times e^{5x^3+3x} = (15x^2 + 3)e^{5x^3+3x}$$

## 3. ملحوظة:

الدوال الأصلية للدالة ل:  $g(x) = u'(x) e^{u(x)}$  هي الدوال التي على شكل:  $(c \in \mathbb{R})$  ;  $G(x) = e^{u(x)} + c$ 

## 4. تطبيق:

نجد الدوال الأصلية ل:  $f(x) = x.e^{3x^2+1}$  هي  $F(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2+1} + c$ IV. نهايات اعتيادية ل  $f(x) = e^x$ 

نهايات اعتيادية

نهايات يجب معرفتها

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2

$$(n \in \mathbb{N}^*) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0$$

3

$$n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

4

تأويل الهندسي لنتيجة

نهايات  $f(x) = e^x$ الدالة  $f$  تقبل مقارب أفقي معادلته:  $y = 0$  (اي محور الأفصيل) بجوار

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار  $+\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

الدالة  $f$  تقبل فرع شلجي في اتجاه محور الأراتيب بجوار  $+\infty$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

## 2. برهان:



أ - نهاية اعتيادية : مثلا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  . ( يمكن استنتاج هذه النهاية من خلال  $f(x) = \ln(x)$  و دالتها العكسية  $f^{-1}(x) = e^x$  )

نضع :  $e^x = x$  إذن :  $x \rightarrow +\infty$  فإن :  $X \rightarrow +\infty$  وكذلك  $x = \ln(X)$  .

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$

خلاصة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

ب - نهاية يجب معرفتها : مثلا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  مع  $n \in \mathbb{N}^*$  .

نضع :  $X = \frac{x}{n}$  إذن :  $x \rightarrow +\infty$  فإن :  $X \rightarrow +\infty$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{nX}}{(nX)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^X)^n}{(nX)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^X}{nX} \right)^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \left( \frac{e^X}{X} \right)^n = +\infty$$

3. تطبيق 1 :

تطبيق 1 :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times e^x = +\infty$$

$$\text{طريقة 2 : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \text{ مع } t = 2x$$

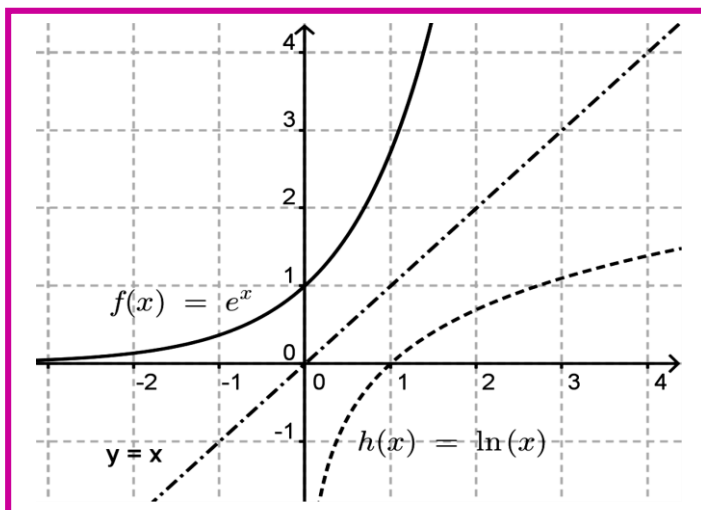
تطبيق 2 : أحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{x^3}$

V. دراسة الدالة  $f(x) = e^x$  :

جدول تغيرات f :

| x  | $-\infty$ | $+\infty$ |
|----|-----------|-----------|
| f' | +         |           |
| f  | 0         | $+\infty$ |

إنشاء منحنى الدالة f في م.م.  $(0, \vec{i}, \vec{j})$





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + ع. فيزياء



الصفحة

درس : الدوال الأسية

VI. الدالة الأسية للأساس  $a$  مع:  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ 

1. تعريف:

ليكن  $a$  من  $]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ . الدالة المعرفة كما يلي:  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$   $\forall x > 0$  هي متصلة ورتيبة قطعاً على  $]0,+\infty[$  هي

تقابل و تقابلها العكسي  $f^{-1}$  يسمى الدالة الاسية للأساس  $a$  و معرفة كما يلي :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]0,+\infty[$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$$

2. توضيح:

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow y = e^{x \ln(a)}$$

$$\text{إذن : } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^{x \ln(a)} = y$$

3. كتابة جديدة لـ  $f^{-1}(x) = e^{x \ln a}$ 

$$\text{نأخذ : } r \text{ من } \mathbb{Q} \text{ نحصل على } f^{-1}(r) = e^{r \ln a} = e^{\ln a^r} = a^r$$

وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية  $x$  ومنه : نكتب  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = e^{x \ln a} = a^x$

$$\text{خلاصة : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} = a^x$$

4. مثال:

$$5^x = e^{x \ln 5} \text{ و } \left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x \ln 5} \text{ و } 10^x = e^{x \ln 10}$$

5. ملحوظة: لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $\log_a(a^x) = x$  و لكل  $x > 0$  :  $a^{\log_a(x)} = x$  و  $10^x = y \Leftrightarrow x = \text{Log}(y)$

6. تذكير لمراحل تعريف الأس :

$$\bullet \text{ القوة ذات الأس الصحيح الطبيعي : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n \text{ مع } a^1 = a \text{ و } a^0 = 1$$

$$\bullet \text{ القوة ذات الأس الصحيح النسبي : } \forall p > 0, a^p = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_p \text{ و } \forall p < 0, a^p = \frac{1}{a^{-p}}, (a \neq 0) \text{ مع } a^1 = a \text{ و } a^0 = 1$$

$$\bullet \text{ القوة ذات الأس الجذري : } r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ (مع } p \in \mathbb{Z} \text{ و } q \in \mathbb{N}^*) \text{ , } (a > 0) \quad a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$\bullet \text{ القوة ذات الأس عدد حقيقي : } \forall x \in \mathbb{R}, a^x = e^{x \ln a}, (a > 0)$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + ع. فيزياء



الصفحة

درس : الدوال الأسية

7. نتائج:

ليكن  $a$  من  $]0,1[ \cup ]1,+\infty[$  والدالة  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ (1)  $f$  معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

(2)  $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times e^{x \ln a} = (\ln(a)) \times a^x$

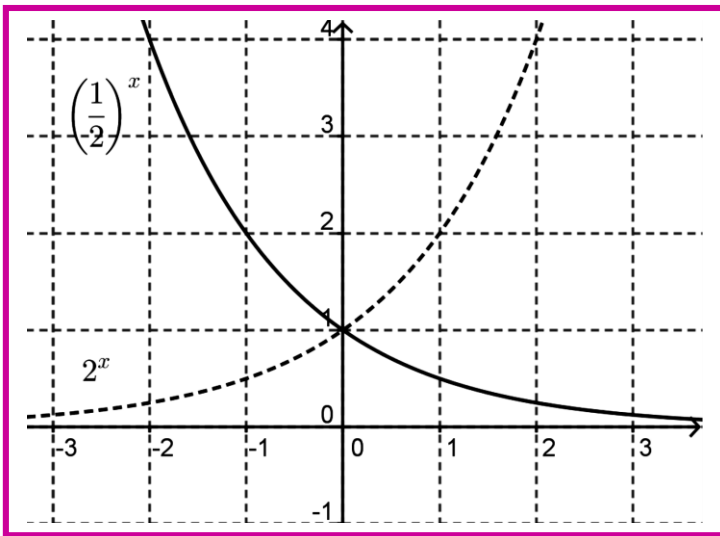
(3) ومنه إشارة:  $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$  هي إشارة  $\ln a$ • إذا كان:  $0 < a < 1$  فإن:  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  تناقصية: ومنه:  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$ • إذا كان:  $a > 1$  فإن:  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  تزايدية: ومنه:  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$ 

8. خاصيات:

لكل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ :

•  $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

•  $(a^x)^y = a^{xy}$  و  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$  و  $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$  و  $a^x \times a^y = a^{x+y}$

إنشاء منحنى الدالة:  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(0, \bar{i}, \bar{j})$  معحالة 1:  $0 < a < 1$  نأخذ:  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ حالة 2:  $a > 1$  نأخذ:  $f(x) = 2^x$ 

9. مثال:

(1) أكتب الدالة الآتية باستعمال الدالة الأسية النبرية:  $f(x) = 3^{x^3 - x}$ (2) حدد مجموعة تعريف  $f$ .(3) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (4) ثم أحسب الدالة المشتقة  $f'$  ل  $f$ .