



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

01. باك 2015 الدورة العادية

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2 cm) .

.. I

01. نبين أن : $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$ (D_f مجموعة تعريف الدالة f) (0.5 ن)

لدينا : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ و $x(1-\ln x) \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $x \neq 0$ و $1-\ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $\ln x \neq \ln e$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $x \neq e$

$\Leftrightarrow x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f =]0; e[\cup]e; +\infty[$

..02

أ- نحسب : $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ و أول هندسيا للنتيجتين المتوصل إليهما (0.75 ن)

• $\lim_{x \rightarrow e^-} 1 - \ln x = 0^-$ لأن : $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x(1-\ln x)} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow e^+} 1 - \ln x = 0^+$ لأن : $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x(1-\ln x)} = +\infty$

• تأويل هندسيا للنتيجتين المتوصل إليهما : منحنى f يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = e$.

ب- نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده (0.5 ن)

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1-\ln x)} = 0$ لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$

• نستنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا أفقي بجوار $+\infty$ هو المستقيم الذي معادلته $y = 0$

ج- نبين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) (0.5 ن)

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ و $-\ln x > 0$

• تأويل هندسيا النتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$.

...03

أ- نبين أن : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f (0.75 ن)



- الدالة العددية f هي قابلة للاشتقاق على D_f (لأنها جداء ومقلوب دوال قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على D_f)

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x(1-\ln x)} \right]' = \frac{-(x(1-\ln x))'}{(x(1-\ln x))^2} = -\frac{1-\ln x + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(x(1-\ln x))^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

• لدينا : $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ خلاصة : $f'(x)$ لكل x من D_f .

ب- نبين أن : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1[$ و تزايدية على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$ (1 ن)

- ندرس إشارة f' : إشارة f' هي إشارة $\ln x$ على D_f

- على المجال $]0;1[$ لدينا $\ln x \leq 0$ ومنه : الدالة f تناقصية على المجال $]0;1[$.

- على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$ لدينا $\ln x \geq 0$ ومنه : الدالة f تزايدية على كل من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$

ج- نضع جدول تغيرات الدالة f على D_f (0.25 ن)

x	0	1	e	$+\infty$
f'	-	0	+	+
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		1		$-\infty$

.. II

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$.

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (أنظر الشكل) .

.. 01

أ- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x) = 0$, $x \in]0;+\infty[$ (0.5 ن)

أي نحدد عدد نقاط تقاطع المنحنى و محور الأفاصيل و بالتالي المعادلة لها حلين

ب- نعطي جدول القيم التالية :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن : المعادلة (E) تقبل حلا α حيث : $2,2 < \alpha < 2,3$ (0.5 ن)

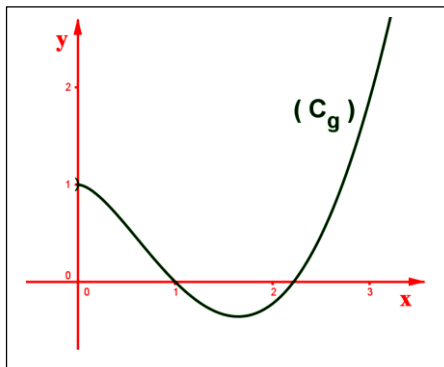
- مبيانيا الدالة g متصلة على المجال $[2,2;2,3]$

- من خلال الجدول $g(2,2) \times g(2,3) = -0,02 \times 0,12 < 0$

- إذن حسب مبرهنة المتوسط يوجد α من المجال $]2,2;2,3[$ حيث $g(\alpha) = 0$

خلاصة : المعادلة (E) تقبل حلا α حيث : $2,2 < \alpha < 2,3$

.. 02





أ- نتحقق من أن : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$ لكل x من D_f (0.25 ن)

$$f(x) - x = \frac{1}{x(1 - \ln x)} - x = \frac{1 - x^2(1 - \ln x)}{x(1 - \ln x)} = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$$

خلاصة : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$ لكل x من D_f .

ب- نبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين أفصولهما 1 و α (0.5 ن)

ندرس تقاطع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (C_f) و لهذا نحل المعادلة : $f(x) = x$: $x \in D_f$

$$\text{أو أيضا : } x \in D_f : f(x) - x = 0 \text{ وهذا يكافئ } x \in D_f : \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} = 0 \text{ أي } x \in D_f : g(x) = 0$$

مبيانيا هناك حلين و حسب ما سبق $g(\alpha) = 0$ و لدينا $g(1) = 0$ (بالحساب أو مبيانيا)

خلاصة : المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين أفصولهما 1 و α

ج- نحدد انطلاقا من (C_g) ؛ إشارة الدالة g على المجال $[1; \alpha]$ و نبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1; \alpha]$ (0.5 ن)

• إشارة الدالة g على المجال $[1; \alpha]$

على المجال $[1; \alpha]$ $g(x) < 0$ بالنسبة ل $g(1) = 0$ و $g(\alpha) = 0$ و بصفة عامة على المجال $[1; \alpha]$ $g(x) \leq 0$

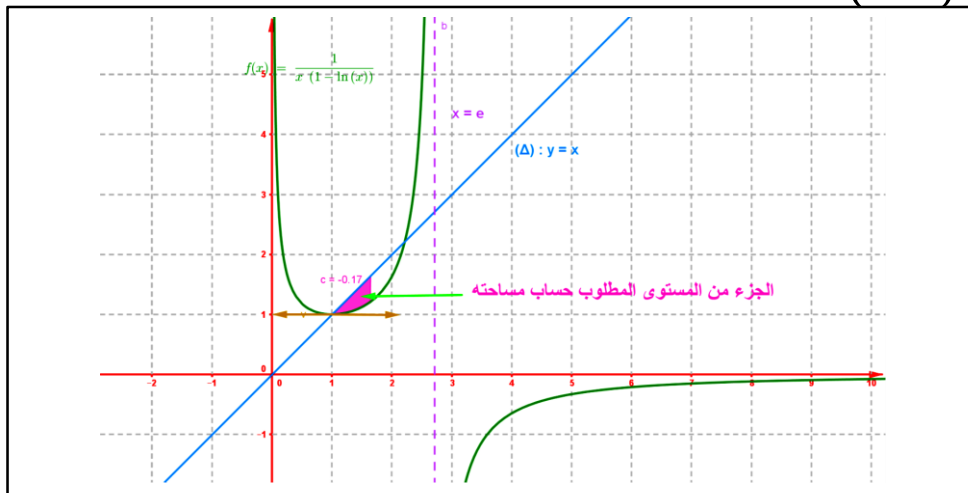
• نبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1; \alpha]$.

على المجال $[1; \alpha]$: $g(x) \leq 0$ و $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \geq 1 > 0$ حسب جدول تغيرات f على المجال $[1; e]$ و

$$[1; \alpha] \subset [1; e] \text{ و منه : } f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0 \text{ لكل } x \text{ من } D_f.$$

خلاصة : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1 - \ln x)} \leq 0$ لكل x من D_f .

03. ننشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (1.25 ن)





سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

..04

أ- نبين أن : $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ (لاحظ أن : $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f (0.75 ن)

$$\text{لدينا : } \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)} dx = [1-\ln x]_1^{\sqrt{e}} = \ln 2$$

$$\text{خلاصة : } \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$$

ب- نحسب ، ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = \sqrt{e} \text{ و } x = 1 \text{ (0.75 ن)}$$

$$A = 4 \times \int_1^{\sqrt{e}} (x - f(x)) dx = -4 \times \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x(1-\ln x)} - x \right) dx = -4 \left[\ln(1-\ln x) - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{\sqrt{e}}$$

المساحة A هي :

$$= -4 \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times e + \frac{1}{2} \right) = 4 \ln 2 + 2e \text{ cm}^2$$

... III

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نبين بالترجع أن : $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$ (0.5 ن)

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$

لدينا : $1 \leq u_0 = 2 \leq \alpha$ (مع $2,2 < \alpha < 2,3$)

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى الرتبة n : أي $1 \leq u_n \leq \alpha$.

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

حسب معطيات الترجع لدينا : (لأن f تزايدية على $[1; \alpha]$)

$$1 \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha) \quad ([1; \alpha])$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq \alpha ; (f(\alpha) - \alpha = 0)$$

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$

خلاصة : $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (2 ج -) (0.5 ن)

نبين أن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

نضع $x = u_n$ ونعلم أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ إذن $1 \leq x \leq \alpha$ ولدينا : $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[1; \alpha]$ من جهة أخرى :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

$$= f(x) - x \leq 0$$

و منه : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية.



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

03. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها (0.75 ن)

- لدينا المتتالية (u_n) تناقصية و مصغرة لأن $1 \leq u_n \leq \alpha$ و منه : المتتالية (u_n) متقاربة حسب خاصية .
- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$ و الدالة f متصلة على $I = [1; \alpha]$ و $f(I) \subset I$: المتتالية (u_n) متقاربة إذن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in [1; \alpha]$
- أي $f(x) - x = 0$; $x \in [1; \alpha]$ و هذه المعادلة لها حلين هما 1 و α و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية إذن $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n$ و منه $u_0 = 2 \geq u_n$ و منه $u_n \leq 2$ الحل هو $\ell = 1$ و ليس α لأن $2, 2 < \alpha < 2, 3$
- خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

02. باك 2014 الدورة العادية

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D =]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$.

01. نبين أن : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0; +\infty[$. (0.5 ن)

- لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ (مجموع دوال قابلة للاشتقاق) : $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)\right)' = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$
- ومنه : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$.

- لدينا : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} > 0$ لأن x من $]0; +\infty[$ ومنه الدالة g تزايدية على $]0; +\infty[$.

02. تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0; 1]$ و $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1; +\infty[$. (0.75 ن)

- $g(1) = 0$: $g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$

- لدينا لكل x من $]0; 1]$ إذن $x \leq 1$ بما أن g تزايدية إذن $g(x) \leq g(1)$ أي $g(x) \leq 0$.

- لدينا لكل x من $[1; +\infty[$ إذن $x \geq 1$ بما أن g تزايدية إذن $g(x) \geq g(1)$ أي $g(x) \geq 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$. ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. نبين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

- لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

- تأويل الهندسي للنتيجة : المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$.

02. أ- نحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0.25 ن)



• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب - نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (1 ن)

• نضع $t = \sqrt{x}$ ومنه $t^2 = x$ و $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$ وبالتالي :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(t^2))^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2\ln(t)}{t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} + 2 \frac{\ln(t)}{t} \right)^2 = 0$$

• لأن $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} = 0 \text{ : خلاصة}$$

• نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(x))^2}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 + 0 = 0$$

ج - نحدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ (0.25 ن)

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ إذن المنحنى (C_f) يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه محور الأفاصل بجوار $+\infty$.

03. أ- نبين أن : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية على $]0; 1]$ و تزايدية على $[1; +\infty[$ (1.5 ن)

• نبين أن : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$.

لدينا :

$$f'(x) = \left((1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right)' = 2(1 + \ln(x)) \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} (1 + \ln(x)) - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} \left(1 + \ln(x) - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{2g(x)}{x}$$

خلاصة : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$.

• نستنتج أن f تناقصية على $]0; 1]$ و تزايدية على $[1; +\infty[$.

إشارة f' هي إشارة g حسب ما سبق السؤال 2 لدينا : $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0; 1]$ و $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1; +\infty[$ و

منه f تناقصية على $]0; 1]$ و تزايدية على $[1; +\infty[$.

خلاصة : f تناقصية على $]0; 1]$ و تزايدية على $[1; +\infty[$.

ب- نضع جدول لتغيرات الدالة f على $]0; +\infty[$ ثم استنتج أن $f(x) \geq 0$ لكل x من $]0; +\infty[$ (1 ن)



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



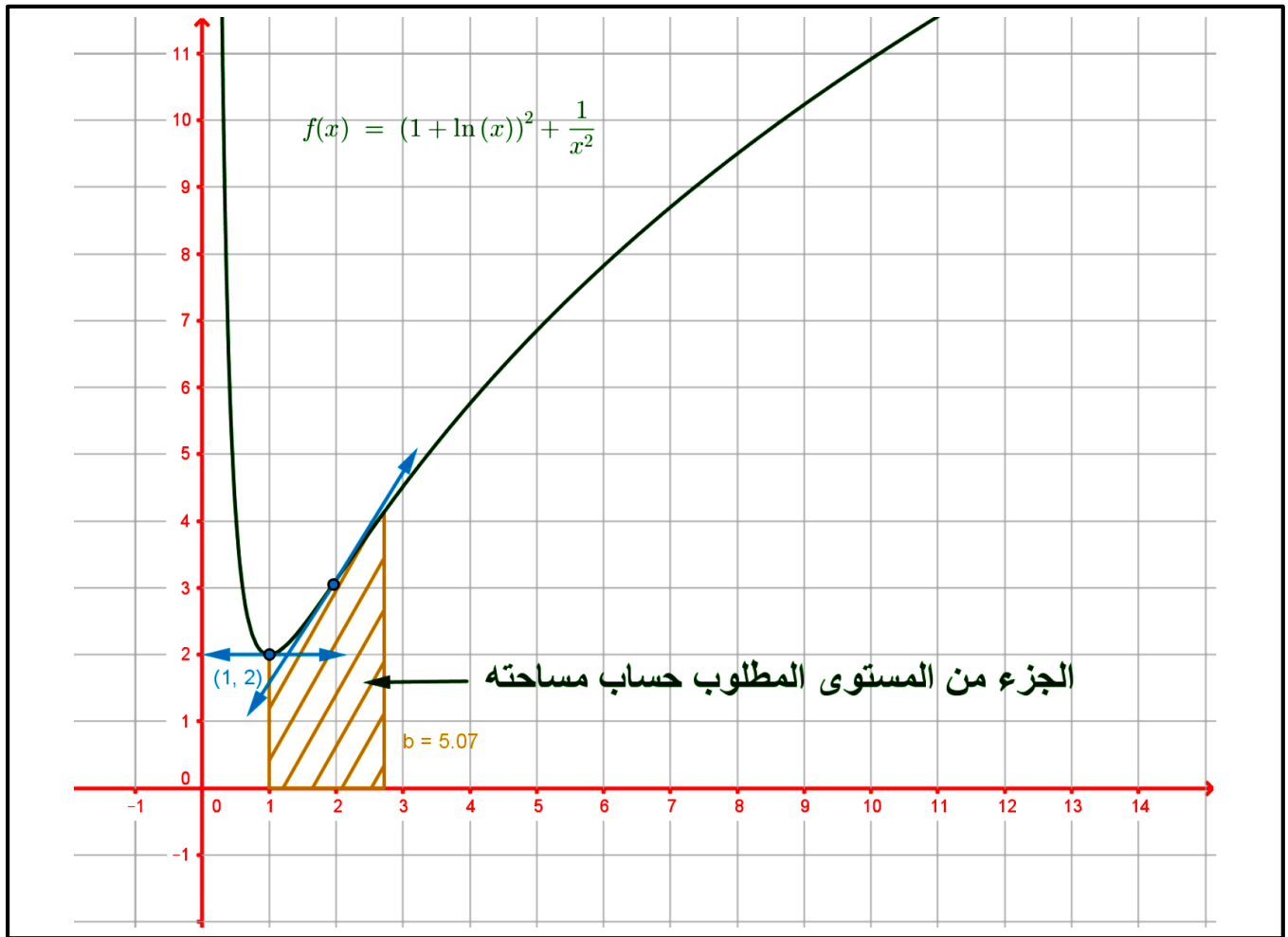
الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

• جدول تغيرات الدالة f

x	0	1	$+\infty$
f'		- 0 +	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	

04. أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نقبل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب) . (0.75 ن)



05. نعتبر التكاملين I و J التاليين $I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx$ و $J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$

أ - نبين أن : $H : x \rightarrow x \ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \rightarrow 1 + \ln(x)$ على $]0; +\infty[$ ثم استنتج أن $I = e$. (0.5 ن)

• لدينا : $H'(x) = (x \ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$

إذن : $H : x \rightarrow x \ln(x)$ دالة أصلية للدالة $h : x \rightarrow 1 + \ln(x)$ على $]0; +\infty[$

• لدينا : $I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx = e$ ومنه : $I = \int_1^e (1 + \ln(x)) dx = [H(x)]_1^e = [x \ln(x)]_1^e = e \ln(e) - 1 \times \ln(1) = e$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء نبين أن : $J = 2e - 1$. (0.5 ن)
نضع :

$$u(x) = (1 + \ln(x))^2 \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times (1 + \ln(x))$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

$$J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$$

$$= \left[x(1 + \ln(x))^2 \right]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times (1 + \ln(x)) dx$$

$$= e(1+1)^2 - 1(1+0)^2 - 2I \quad \text{ومنه :}$$

$$= 4e - 1 - 2e$$

$$= 2e - 1$$

خلاصة : $J = 2e - 1$

ج - نحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و

$x = e$. (0.5 ن)

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$ هي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \left((1 + \ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$= 2e - 1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$= 2e - 1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = 2e - \frac{1}{e}$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

هي : $\mathcal{A} = 2e - \frac{1}{e}$ (u.a) (معبر عنها بوحدة المساحة)

03. باك 2013 الدورة الاستدراكية

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $D =]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - x - \ln(x)$.

01. أ - نتحقق أن : $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$. (0.25 ن)

لدينا : $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$.

خلاصة : $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$

ب - نبين أن $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ و استنتج أن الدالة g تناقصية على $]0; 1[$ و تزايدية على $]1; +\infty[$. (1 ن)



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

• لدينا : $g'(x) = (x^2 - x - \ln(x))' = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ و منه : $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

• $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ لأن $2x+1$ موجبة على $]0; +\infty[$ ومنه : $x-1$ سالبة على $]0; 1[$ إذن الدالة g تناقصية على $]0; 1[$ ؛ $x-1$ موجبة على $[1; +\infty[$ إذن الدالة g تزايدية على $[1; +\infty[$.

• خلاصة : $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ و الدالة g تناقصية على $]0; 1[$ تزايدية على $[1; +\infty[$.

02. بين أن : $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0; +\infty[$ (لاحظ أن $g(1) = 0$) . (0.5 ن)

بما أن : الدالة g تناقصية على $]0; 1[$ تزايدية على $[1; +\infty[$ إذن الدالة g تقبل قيم دنيا في النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$ و منه لكل x من $]0; +\infty[$ فإن $g(x) \geq g(0)$ أي $g(x) \geq 0$ لأن $g(1) = 0$ ومنه : $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0; +\infty[$ (يمكنك وضع جدول تغيرات الدالة g)

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln(x))^2$. وليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. أ - نبين أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ و أول هندسيا النتيجة . (0.5 ن)

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و منه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = -\infty$

• **نوول هندسيا النتيجة :** المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$.

ب - نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. (لاحظ أن $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right)$) . (0.5 ن)

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right) = 1$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right) - 1 = +\infty$

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)^2 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - \ln(x) \right) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

ج - استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعاً شلجياً بجوار $+\infty$ يتم تحيد اتجاهه . (0.25 ن)

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ فإن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

02. أ - نبين أن : $f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right)$ لكل x من $]0; +\infty[$. (1 ن)



لدينا : $f'(x) = (x^2 - 1 - (\ln(x))^2)' = 2x - 2(\ln x)' \ln x = 2x - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = 2 \left(\frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right)$

خلاصة : $f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right)$ لكل x من $]0; +\infty[$.

ب- نتحقق أن : $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ و استنتج أن f تزايدية على $]0; +\infty[$ (0.75 ن)

لدينا : $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$ ومنه : $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \cancel{x} - \ln(x) + \cancel{x}}{x} = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$

ومنه نستنتج أن : $f'(x) = 2 \left(\frac{x^2 - \ln(x)}{x} \right) = 2 \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) \geq 0$ لأن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0; +\infty[$ و بالتالي f تزايدية على $]0; +\infty[$.

خلاصة : $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ و f تزايدية على $]0; +\infty[$.

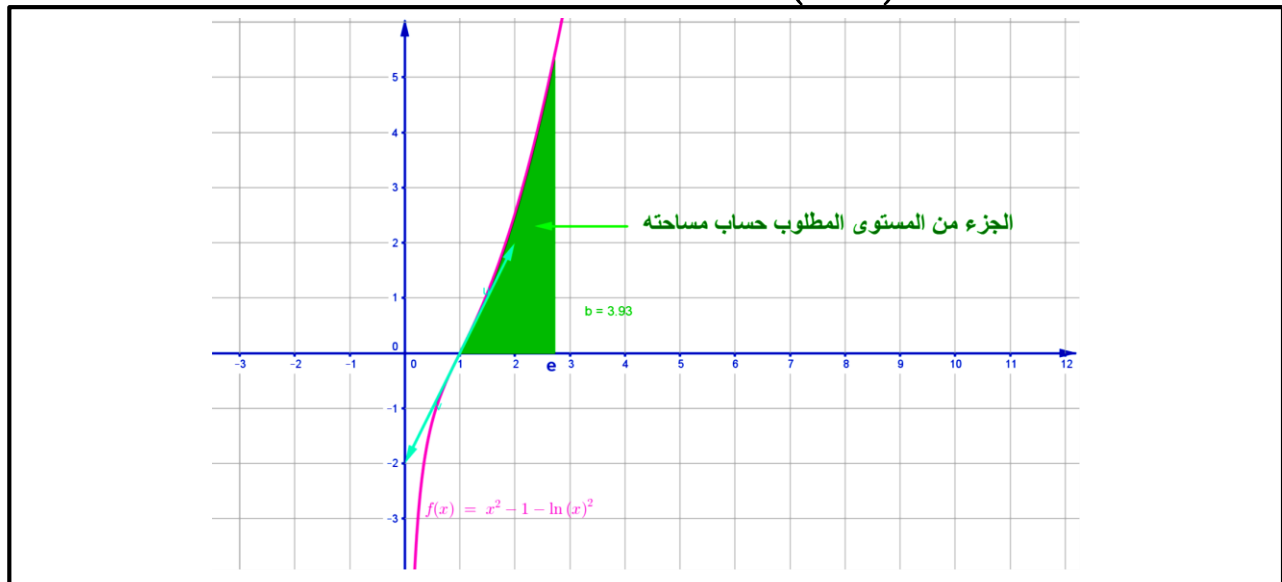
03. أ- نبين أن : $y = 2x - 2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;0)$ (0.5 ن)

• معادلة المماس في النقطة $A(1;0)$ هي :

$$y = (x-1)f'(1) + f(1) = (x-1) \times 2 + 0 = 2x - 2$$

خلاصة : $y = 2x - 2$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;0)$.

ب- ننشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نقبل أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف وحيدة هي $A(1;0)$) (1 ن)



04. أ - لنتحقق أن الدالة $x \rightarrow x(\ln(x) - 1)$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ ثم بين أن :

$$I = \int_1^e \ln(x) dx = 1 \quad (0.75 ن)$$

• لدينا : الدالة $x \rightarrow x(\ln(x) - 1)$ قابلة الاشتقاق على $]0; +\infty[$ مع دالتها المشتقة هي :



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الثاني)

$$(x(\ln(x)-1))' = 1 \times (\ln(x)-1) + x(\ln(x)-1)' = \ln x - 1 + x \times \frac{1}{x} = \ln x$$

خلاصة : الدالة $x \rightarrow x(\ln(x)-1)$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

• لدينا : $I = \int_1^e \ln(x) dx = [x(\ln(x)-1)]_1^e = e(1-1) - 1 - 1 \times (0-1) + 1 = 1$

خلاصة : $I = \int_1^e \ln(x) dx = 1$

ب - باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx = e - 2$ (0.5 ن)

نضع :

$$u(x) = (\ln(x))^2 \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

ومنه :

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e (\ln(x))^2 dx \\ &= \left[x(\ln(x))^2 \right]_1^e - \int_1^e x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x dx \\ &= e(1)^2 - 1(0)^2 - 2I \\ &= e - 2 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

خلاصة : $J = \int_1^e (\ln(x))^2 dx = e - 2$

ج - نبين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهم $x = e$ و $x = 1$

هي $\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$ (0.5 ن)

مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهم $x = e$ و $x = 1$ هي :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e (x^2 - 1 - (\ln(x))^2) dx = \int_1^e (x^2 - 1) dx - \int_1^e (\ln(x))^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^e - e + 2 \quad ; \quad \left(\int_1^e (\ln(x))^2 dx = J = e - 2 \right) \\ &= \left(\frac{e^3}{3} - e - \frac{1}{3} + 1 \right) - e + 2 \\ &= \frac{e^3}{3} - 2e + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \end{aligned}$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتهم $x = e$ و $x = 1$

هي : $\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$ (معبر عنها بوحدة المساحة هي cm^2)