



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

01.

01. نعتبر بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$ عن ما يلي : $\ln 1000$ ؛ $\ln \frac{8}{25}$ و $\ln 0,16$.

$$\bullet \ln 1000 = \ln(10)^3 = 3\ln(2 \times 5) = 3\ln 2 + 3\ln 5$$

$$\bullet \ln \frac{8}{25} = \ln \frac{2^3}{5^2} = 3\ln 2 - 2\ln 5$$

$$\bullet \ln 0,16 = \ln 16 \times 10^{-2} = \ln 16 - 2\ln 10 = \ln 2^4 - 2(\ln 2 + \ln 5) = 4\ln 2 - 2\ln 2 - 2\ln 5 = 2\ln 2 - 2\ln 5$$

02. نبسط ما يلي: $A = \ln \sqrt{5} + \ln \frac{1}{25} - \ln 5$. $B = \ln(7 + 3\sqrt{2})^{2016} + \ln(7 - 3\sqrt{2})^{2016}$. $C = \ln e^3 + \ln \frac{1}{e}$.

$$\bullet A = \ln \sqrt{5} + \ln \frac{1}{25} - \ln 5 = \ln 5^{\frac{1}{2}} - \ln 25 - \ln 5 = \frac{1}{2}\ln 5 - 2\ln 5 - \ln 5 = -\frac{5}{2}\ln 5$$

$$\bullet B = \ln(7 + 3\sqrt{2})^{2016} + \ln(7 - 3\sqrt{2})^{2016} = 2016\ln(7 + 3\sqrt{2}) + 2016\ln(7 - 3\sqrt{2})$$

$$= 2016\ln[(7 + 3\sqrt{2})(7 - 3\sqrt{2})] = 2016\ln(49 - 18) = 2016\ln 31$$

$$\bullet C = \ln e^3 + \ln \frac{1}{e} = 3\ln e - \ln e = 3 \times 1 - 1 = 2$$

03. بدون استعمال المحسبة قارن العددين : $a = 5\ln 2$ و $b = 2\ln 5$.

لدينا : $a = 5\ln 2 = \ln 2^5 = \ln 32$ و $b = 2\ln 5 = \ln 5^2 = \ln 25$ ومنه : $25 < 32$ إذن : $\ln 25 < \ln 32$
خلاصة : $a < b$

02.

حدد حيز تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

01.

$$f(x) = \ln(x+5) + \ln(3-x)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+5 > 0 \text{ و } 3-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -5 \text{ و } 3 > x$$

$$\Leftrightarrow x \in]-5; 3[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-5; 3[$

$$\bullet f(x) = \ln(x^2 - 9) - \ln(-x)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \text{ و } -x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) > 0 \text{ و } x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[\text{ و } x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[$$



خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-\infty; -3[$

$$f(x) = \ln|x-2| + \sqrt{x-1}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ و } x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ و } x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f = [1; 2[\cup]2; +\infty[$

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{2x-8}{x+3}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{2x-8}{x+3} > 0 \text{ و } x+3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-8)(x+3) > 0 \text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[\text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x-2}}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 > 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]2; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]2; +\infty[$

$$f(x) = 5x^2 + \ln \frac{2x-8}{x+3}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{2x-8}{x+3} > 0 \text{ و } x+3 \neq 0$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$\Leftrightarrow (2x-8)(x+3) > 0 \text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[\text{ و } x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x^2}{x}\right) \cdot$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x} > 0 \text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2-x)(2+x) > 0 \text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2; 2[\text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2; 0[\cup]0; 2[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f =]-2; 0[\cup]0; 2[$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{3-\ln x} \cdot$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \text{ و } 3-\ln x \neq 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ و } \ln x \neq 3 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ و } \ln x \neq \ln e^3$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ و } x \neq e^3$$

$$\Leftrightarrow x \in [2; e^3[\cup]e^3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف f هي : $D_f = [2; e^3[\cup]e^3; +\infty[$

03.

حدد مجموعة تعريف ثم حل المعادلة أو المتراجحة أو النظام التالية :

$$(2+x)\ln(x-3) = 0 \quad .01$$

$$\ln(x+1) - \ln(x-2) = 0 \cdot$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0 \text{ و } x-2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1 \text{ و } x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \in]2; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f =]2; +\infty[$

$$D_f =]2; +\infty[\text{ نحل المعادلة على }$$

$$\ln(x+1) - \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln(x-2) \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = x-2$$



$$\Leftrightarrow 1 = -2$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \emptyset$

$$-3 + \ln(x+1) = 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f =]-1; +\infty[$

$$D_f =]-1; +\infty[\text{ نحل المعادلة على }$$

$$-3 + \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln e^3$$

$$\Leftrightarrow x+1 = e^3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3 - 1 \in D_f =]-1; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{e^3 - 1\}$

$$\ln x + \ln(x-3) = 2 \ln 2$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in]3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f =]3; +\infty[$

$$D_f =]3; +\infty[\text{ نحل المعادلة على }$$

$$\ln x + \ln(x-3) = 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln x(x-3) = \ln 2^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \in D_f =]3; +\infty[\text{ أو } x = -1 \notin D_f =]3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{4\}$

$$(2+x) \ln(x-3) = 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x-3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in]3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة هي : $D_f =]3; +\infty[$

$$D_f =]3; +\infty[\text{ نحل المعادلة على }$$

$$(2+x) \ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow 2+x = 0 \text{ أو } \ln(x-3) = 0 \quad \text{لدينا :}$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

تصحيح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ أو } \ln(x-3) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ أو } x-3=1$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \notin D_f =]3; +\infty[\text{ أو } x = 4 \in D_f =]3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{4\}$

... 02

$$\ln x - 4 \leq 0$$

مجموعة تعريف المتراجحة :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]0; +\infty[$

$$D_f =]0; +\infty[\text{ نحل المتراجحة على }$$

لدينا :

$$\ln x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \ln 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; 4[\text{ ; } (x \in D_f =]0; +\infty[)$$

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S =]0; 4[$

$$\ln(2+5x) - \ln(x+6) \leq 0$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 2+5x > 0 \text{ و } x+6 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{5} \text{ و } x > -6$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[$

$$D_f = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[\text{ نحل المتراجحة على }$$

لدينا :

$$\ln(2+5x) - \ln(x+6) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$$

$$\Leftrightarrow 2+5x \leq x+6$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{5}; 1 \right[\text{ ; } \left(x \in D_f = \left] -\frac{2}{5}; +\infty \right[\right)$$

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = \left] -\frac{2}{5}; 1 \right[$



$$\ln(x^2 - 8) \leq \ln x + \ln 2 \quad \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 8 > 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8}) > 0 \text{ و } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{8}[\cup]\sqrt{8}; +\infty[\text{ و } x > 0$$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]\sqrt{8}; +\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]\sqrt{8}; +\infty[$

$$\ln(x^2 - 8) \leq \ln x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 8) \leq \ln(2x) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x + 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-2; 4[\text{ ; } (x \in D_f =]\sqrt{8}; +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow x \in]\sqrt{8}; 4[\text{ ; } (x \in D_f =]\sqrt{8}; +\infty[)$$

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S =]\sqrt{8}; 4[$

$$\ln^2 x + \ln x - 2 \leq 0 \quad \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$$

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]0; +\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]0; +\infty[$

لدينا :

$$\ln^2 x + \ln x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 + \ln x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) + \ln x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) \leq 0$$

x	0	e^{-2}	e	$+\infty$
$\ln x - 1 = \ln x - \ln e$	—	—	0	+
$\ln x + 2 = \ln x + \ln e^2$	—	0	+	+
$(\ln x - 1)(\ln x + 2)$	+	0	—	+

خلاصة : مجموعة حلول المتراجحة هي : $S =]0; e^{-2}[\cup]e; +\infty[$

$$(2+x)\ln(x-3) < 0 \quad \bullet$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in]3; +\infty[$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

خلاصة : مجموعة تعريف المتراجحة هي : $D_f =]3; +\infty[$

نحل المتراجحة على $D_f =]3; +\infty[$

لدينا :

$$\ln(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-3) \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x-3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 4$$

x	-2	3	4	$+\infty$
$2+x$	0	+	+	+
$\ln(x-3)$			-	0
$(2+x)\ln(x-3)$			-	0

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S =]3; 4[$

03. نحل النظام :
$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = 6 \\ 5\ln x + 2\ln y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نضع $\ln x = t$ و $\ln y = z$ ومنه :
$$\begin{cases} 2t - 3z = 6 \\ 5t + 2z = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3z = 6 \\ 5t + 2z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

محددة النظام هي : $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19$ ومنه : $\Delta \neq 0$ إذن النظام هي نظام كرامير Cramer لها حل وحيد :

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}}{19} = \frac{-29}{19} \text{ و } t = \frac{\Delta_t}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}}{19} = \frac{\frac{27}{2}}{19} = \frac{27}{38}$$

أي : $\ln y = z = \frac{-29}{19}$ و $\ln x = t = \frac{27}{38}$

وبالتالي : $x = e^{\frac{27}{38}}$ و $y = e^{\frac{-29}{19}}$

خلاصة : مجموعة حلول النظام هي : $S = \left\{ \left(e^{\frac{27}{38}}, e^{\frac{-29}{19}} \right) \right\}$ أو أيضا حل النظام هو الزوج $\left(e^{\frac{27}{38}}, e^{\frac{-29}{19}} \right)$

.04

نحسب النهايات التالية:

01. ... ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$ (ضع $X = \frac{1}{x}$)

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$ لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + \ln x = -\infty$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$
- $t \rightarrow +\infty$ فإن $x \rightarrow +\infty$ و $t = \sqrt{x}$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 2 \ln \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} \times \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+15}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{3x+15}{x-2} \right) = \ln 3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{-1 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(\frac{2}{\ln x} + 1 \right)}{\ln x \left(\frac{-1}{\ln x} + 1 \right)} = 1$
- نضع $2x = X$ و منه : $x \rightarrow 0$ فإن $X \rightarrow 0$ و منه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{\frac{X}{2}} = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln(1+X)}{X} = 2$
- لأن $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$
- نضع $X = \frac{1}{x}$ و منه : $x \rightarrow +\infty$ فإن $X \rightarrow 0^+$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$ ؛02
- مع $t = x^2 + 1$ $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ لأن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^2+1)}{1+x^3} \right] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{1+x^3} = 0$
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{1+x^3} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = 0$ و $t \rightarrow +\infty$ فإن $|x| \rightarrow +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 2x - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[x^2 - 2 - \frac{\ln x}{x} \right] = +\infty$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e} \text{ نضع : } f(x) = \ln x \text{ ومنه : } f(e) = 1 \text{ إذن}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = (\ln x)'_{x=e} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=e} = \frac{1}{e}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} \text{ نضع : } f(x) = \ln x \text{ ومنه : } f(3) = \ln 3 \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = (\ln x)'_{x=3} = \left(\frac{1}{x}\right)_{x=3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ومنه : } \lim_{x \rightarrow 3} 2x \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} = 2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 2$$

.05

$$\bullet \begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2 - 2 \ln x} ; x > 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^+ \text{ ب :}$$

ندرس اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ (لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x^2 - 2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x}{\ln x} + 1\right) \ln x}{\left(\frac{x^2}{\ln x} - 2\right) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x}{\ln x} + 1\right)}{\left(\frac{x^2}{\ln x} - 2\right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{و ذلك } \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2} = f(0) \text{ ومنه :}$$

خلاصة : الدالة f متصلة على يمين $x_0 = 0$

.06

$$\bullet \begin{cases} f(x) = x \ln(x^2) - 2x ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^+ \text{ ب :}$$

.01 نبين أن : الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.
لدينا :

- الدوال : $x \mapsto x$; $x \mapsto 2x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto \ln x$ متصلة على $\mathbb{R}^*$ و f متصلة على $\mathbb{R}^*$ (مجموع وجداء و مركبة دوال متصلة على $\mathbb{R}^*$.
- ندرس اتصال الدالة f في $x_0 = 0$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x^2) - 2x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(|x|^2) - 2x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(|x|) - 2x = 0 \right)$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ

10

الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

و منه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

و منه : الدالة f متصلة في $x_0 = 0$

خلاصة : الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^*$ ومتصلة في 0 و بالتالي الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

02 ندرس اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x^2) - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) - 2 = -\infty \notin \mathbb{R}$$

خلاصة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$ و منه منحنى الدالة f يقبل مماس موازي للمحور الأرتيب في النقطة $x_0 = 0$.

.07

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{x-1} ; x \in]0; +\infty[\setminus \{1\} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ ب :

01 ندرس اتصال الدالة f في $x_0 = 1$.

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \times \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(0)$$

خلاصة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$

02 ماذا يمكن أن نقول عن اشتقاق f في $x_0 = 1$.

بما أن الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في $x_0 = 1$.

.08

أحسب مشتقة f في كل حالة من الحالات التالية:

01 ...

$$f'(x) = \left[\ln(6-5x) + \frac{3}{x} \right]' = \frac{(6-5x)'}{6-5x} - \frac{3}{x^2} = \frac{-5}{6-5x} - \frac{3}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{\ln x} \right)' = 2 \times \frac{-(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -2 \times \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{-2}{x(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = (\ln^3 x)' = 3(\ln x)^2 (\ln x)' = 3(\ln x)^2 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln(x^3 + 4))' = (x^3 + 4)' \times \ln'(x^3 + 4) = 3x^2 \times \frac{1}{x^3 + 4}$$

$$f'(x) = (\ln|x^2 - 3x|)' = \frac{(x^2 - 3x)'}{x^2 - 3x} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}$$

02

$$f'(x) = [(x^2 - 1) \ln x]' = 2x \ln x + (x^2 - 1)(\ln x)' = 2x \ln x + (x^2 - 1) \times \frac{1}{x}$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$f'(x) = \left[\frac{\ln x}{x^2 + 1} \right]' = \frac{(\ln x)'(x^2 + 1) - (\ln x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\frac{x^2 + 1}{x} - (\ln x)(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - (\ln x)(2x + 1)x}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - (\ln x)(2x^2 + x)}{x(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \left(3x^2 + \ln \frac{2x-8}{x+3} \right)' = (3x^2)' + \left(\frac{2x-8}{x+3} \right)' = 6x \times \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{(x+3)^2} = \frac{6x \times 14}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2 \ln x + 3}{\ln x - 7} \right)' = \frac{(2 \ln x + 3)'(\ln x - 7) - (2 \ln x + 3)(\ln x - 7)'}{(\ln x - 7)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x}(\ln x - 7) - (2 \ln x + 3) \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 7)^2} = \frac{2(\ln x - 7) - (2 \ln x + 3)}{x(\ln x - 7)^2} = \frac{-17}{x(\ln x - 7)^2}$$

طريقة 2 :

$$f'(x) = \left(\frac{2 \ln x + 3}{\ln x - 7} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{(\ln x - 7)^2} \times (\ln x)' = \frac{-17}{(\ln x - 7)^2 x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x - \ln x}{x^2} \right)' = \frac{\left(1 - \frac{1}{x} \right)x^2 - (x - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{x^2 - x - 2x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x^2 - x + 2x \ln x}{x^4}$$

f(x) = ln(ln x) .03

$$f'(x) = \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(2\sqrt{x^2 + 1})} = \frac{\cancel{2}(x + \sqrt{x^2 + 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \left[\ln(x^2 - 5x + 1) \right]' = \frac{(x^2 - 5x + 1)'}{x^2 - 5x + 1} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 1}$$

$$f'(x) = \left[[\ln(6 - 5x)]^2 \right]' = 2[\ln(6 - 5x)]'[\ln(6 - 5x)] = 2 \times \frac{-5x}{6 - 5x} \times [\ln(6 - 5x)]$$

$$f'(x) = (\ln(\ln x))' = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

12

الصفحة

تصحيح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

09.

نحدد دالة أصلية على المجال I للدوال الأصلية التالية :

- $f(x) = x^2 - 5x + \frac{1}{x}$; $I =]0, +\infty[$: دالة أصلية على المجال I هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \ln x$ لأن $\ln|x| = \ln x$.
- $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$: دالة أصلية على المجال I هي $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + 5\ln x - \frac{3}{x}$ لأن $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$.
- $f(x) = \frac{5}{x+1}$; $I =]-\infty, -1[$: دالة أصلية على المجال I هي $F(x) = 5\ln|x+1| = 5\ln(-x-1)$ لأن $x \in I =]-\infty, -1[$.

10.

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^{++}$ ب : $f(x) = x + \ln x$.

01. نبين أن : الدالة f تحقق تقابل من $\mathbb{R}^{++}$ إلى مجال J يتم تحددده .
لدينا :

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^{++}$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^{++}$.
- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{++}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^{++}$ مع $f(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ لأن $x \in \mathbb{R}^{++}$ و بالتالي الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^{++}$.

• لدينا : $J = f(I) = f(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[$.

خلاصة : الدالة f تحقق تقابل من $\mathbb{R}^{++}$ إلى مجال $J =]-\infty; +\infty[$.

02. نعل أن المعادلة $x + \ln x = 2005$ تقبل حل وحيد α من $]0; +\infty[$ و $1997 \leq \alpha \leq 1998$ (نأخذ $\ln 1997 \approx \ln 1998 \approx 7,6$)

لدينا : $2005 < f(1998) \approx 1998 + 7,6$; $f(1997) \approx 1997 + 7,6 < 2005$ و منه $f(1997) < 2005 < f(1998)$ من خلال مبرهنة المتوسط و التقابل يوجد عدد وحيد α من $]1997; 1998[$ حيث $f(\alpha) = 2005$.

11.

01. نبسط : $\log_3(81) = \log_3(3^4) = 4\log_3(3) = 4 \times 1 = 4$.

02. نحدد العدد x حيث اللوغاريتم هذا العدد في الأساس 4 هو -2 أي

$$\begin{aligned} \log_4(x) = -2 &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln 4} = -2 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -2\ln 4 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln 4^{-2} \end{aligned}$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

13

الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$\Leftrightarrow x = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

خلاصة : العدد هو $x = \frac{1}{16}$

طريقة 2 :

$$\log_4(x) = -2 \Leftrightarrow \exp_4(\log_4(x)) = \exp_4(-2)$$

$$\Leftrightarrow x = 4^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$$

03. نحدد حيز تعريف الدالة f : $f(x) = \log_2(x+1)$ ؛ $f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x^2 - 1)$ ؛ $\log_x(10)$

$$\bullet f(x) = \log_2(x+1)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة f هو : $D_f =]-1; +\infty[$

$$\bullet f(x) = \sqrt{x} + \log_3(x^2 - 1)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ و } x^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ و } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; +\infty[$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة f هو : $D_f =]1; +\infty[$

$$\bullet f(x) = \log_x(10)$$

$$f(x) = \log_x(10) = \frac{\ln 10}{\ln x} \text{ نلاحظ أن :}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0 \text{ و منه :}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

خلاصة : حيز تعريف الدالة f هو : $D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

ملحوظة : اللوغاريتم الذي أساسه a يشترط أن $a \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$

04. أحسب الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

$$\bullet f(x) = \log_5(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = [\log_5(x^2 + 1)]'$$

$$= \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln 5} \right]'$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

14

الصفحة

تصحیح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\ln 5} \times [\ln(x^2 + 1)]' \\ &= \frac{1}{\ln 5} \times \left[\frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} \right] \\ &= \frac{1}{\ln 5} \times \frac{2x}{(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

خلاصة : الدالة المشتقة للدالة f هي : $f'(x) = [\log_5(x^2 + 1)]' = \frac{1}{\ln 5} \times \frac{2x}{(x^2 + 1)}$

$$f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) \quad \bullet$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\log_3(\sqrt{x^2 - 2x - 3})]' \\ &= \left[\frac{\ln(\sqrt{x^2 - 2x - 3})}{\ln 3} \right]' \\ &= \frac{1}{\ln 3} \left(\ln(\sqrt{x^2 - 2x - 3}) \right)' \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{(\sqrt{x^2 - 2x - 3})'}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{(x^2 - 2x - 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3} \end{aligned}$$

خلاصة : الدالة المشتقة للدالة f هي : $f'(x) = [\log_3(\sqrt{x^2 - 2x - 3})]' = \frac{1}{\ln 3} \times \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3}$

$$f(x) = \log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \bullet$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\log_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right]' \\ &= \left[\frac{\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\ln 2} \right]' \end{aligned}$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

15

الصفحة

تصحيح تمارين : الدوال اللوغاريتمية (الجزء الأول)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\ln 2} \times \left[\ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right]' \\ &= \frac{1}{\ln 2} \times \left[\frac{\left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right)'}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1 + \frac{1}{2} \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)} \\ &= \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{2 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)} \end{aligned}$$

خلاصة : الدالة المشتقة للدالة f هي : $f'(x) = \left[\log_2 \left(\tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right]' = \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{2 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\tan \left(\frac{x}{2} \right)}$

.12

نذكر أن : $\log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$ ونرمز لـ $\log_{10}(x)$ بـ $\log(x)$ و يسمى اللوغاريتم العشري (أي الذي أساسه 10 .

ملحوظة : $\log(1) = 0$ و $\log(10^p) = p$ مع $p \in \mathbb{Z}$.

pH لمحلول معرف بالعلاقة : $\text{pH} = -\log \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C_0} \right)$ حيث $[\text{H}_3\text{O}^+]$ تمثل تركيز أيونات H_3O^+ (ions oxonium) معبر عنها

ب mol / litre و C_0 معبر عنها ب 1 mol / litre .

.01 نحسب pH التي توافق تركيز $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2} \text{ mol / l}$.

.02 أحسب التركيز أيونات (ions oxonium) في محلول حيث pH هو 7 .

.03 كيف يصبح pH عندما التركيز يقسم على 10 ؟ على 100 ؟

.04 ما هو التركيز عندما ينخفض pH ب 1 ؟ ب 2 ؟

.05 لماذا الكيميائيين يستعملون $\log$ (اللوغاريتم العشري) بدل $\ln$ (اللوغاريتم النبيري) عند حساب pH ؟