

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الدوال اللوغاريتمية
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\} \text{ ومنه } x = \frac{9}{2} \in D_E \text{ يعني } -2x = -9$$

$$\ln(2x-6) \geq 0 \quad (3)$$

المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-6 > 0$

يعني إذا كان: $x > 3$ إذن: $D_E =]3; +\infty[$

المرحلة 2: حل المتراجحة:

$$\ln(2x-6) \geq \ln 1 \text{ يعني } \ln(2x-6) \geq 0$$

$$x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty[\text{ يعني } x \geq \frac{7}{2} \text{ يعني } 2x-6 \geq 1$$

$$\text{ومنه } S = \left[\frac{7}{2}; +\infty[\text{ يعني } S = \left[\frac{7}{2}; +\infty[\cap]3; +\infty[$$

تمرين 3: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\ln(2x) = \ln(x^2+1) \quad (2) \quad \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0 \quad (1) \text{ أجوبة:}$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x-1 > 0$

$$1-x > 0$$

$$\text{يعني إذا كان: } x > \frac{1}{2} \text{ و } x < 1 \text{ إذن: } D_E = \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(2x-1) = \ln(1-x) \text{ يعني } \ln(2x-1) - \ln(1-x) = 0$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3} \right\} \text{ ومنه } x = \frac{2}{3} \in D_E \text{ يعني } 3x=2 \text{ يعني } 2x-1=1-x$$

$$\ln(2x) = \ln(x^2+1) \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x > 0$ و $x^2+1 > 0$ يعني

$$D_E =]0; +\infty[\text{ إذن: } x > 0$$

$$\text{ليكن } x \text{ من }]0; +\infty[: 2x = x^2+1 \Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(x^2+1)$$

$$x=1 \in D_E \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\text{إذن مجموعة حلول المعادلة: } (E) \text{ هي: } S = \{1\}$$

تمرين 4: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0$

الجواب: المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$x-1 > 0 \text{ و } 3x+1 > 0 \text{ أي } \left(x > -\frac{1}{3}; x > 1 \right) \text{ يعني } x > 1$$

المرحلة 2: حل المتراجحة: ليكن x من $]1; +\infty[$

$$\ln(x-1) - \ln(3x+1) < 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) < \ln(3x+1)$$

$$x > -1 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x-1 < 3x+1$$

$$\text{إذن: } S =]1; +\infty[\cap]-\frac{1}{3}; +\infty[\cap]-1; +\infty[\text{ أي } S =]1; +\infty[$$

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية:

$$h: x \rightarrow \frac{x}{\ln x} \quad (3) \quad g: x \rightarrow \ln(x^2-3x+2) \quad (2) \quad f: x \rightarrow \ln(x+1) \quad (1)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\} \text{ يعني } f(x) = \ln(x+1) \quad (1) \text{ أجوبة:}$$

$$D_f =]-1; +\infty[\text{ ومنه } x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$g(x) = \ln(x^2-3x+2) \quad (2)$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-3x+2 > 0\} \text{ يعني}$$

$$x^2-3x+2 \text{ نبحث عن الجذور}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن لثلاثية الحدود جذرين هما:

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

نحدد جدول الإشارة:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

$$\text{ومنه } D_g =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0\} \text{ يعني } h(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (3)$$

$$D_h =]0; 1[\cup]1; +\infty[\text{ يعني } \ln x = \ln 1 \text{ يعني } x=1 \text{ ومنه: }]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

تمرين 2: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \quad (2) \quad \ln(x-2) = 0 \quad (1)$$

$$\ln(x-1) \geq 0 \quad (3)$$

$$\ln(x-1) = 0 \quad (1) \text{ أجوبة:}$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x-2 > 0$

$$\text{يعني إذا كان: } x > 2 \text{ إذن: } D_E =]2; +\infty[$$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(x-2) = \ln(1) \text{ يعني } \ln(x-2) = 0$$

$$\text{يعني } x-2=1 \text{ يعني } x=3 \in D_E \text{ ومنه } S = \{3\}$$

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \quad (2)$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $5x-10 > 0$

$$3x-1 > 0$$

$$\text{يعني إذا كان: } x > 2 \text{ و } x > \frac{1}{3} \text{ إذن: } D_E =]2; +\infty[$$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(3x-1) = \ln(5x-10) \text{ يعني } 3x-1=5x-10$$

تمرين 7: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة و المتراجحة التالية:

$$\ln(2x+5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \quad \ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3 \quad (1)$$

الأجوبة: $\ln x + \ln(x-1) - \ln 2 = \ln 3 \quad (1)$ يعني

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3 \quad \text{يعني} \quad \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$$

المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا فقط إذا كان: $x > 0$ و $x-1 > 0$

يعني إذا كان: $x > 0$ و $x > 1$ إذن: $D_E =]1; +\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة:

$$\ln(x(x-1)) = \ln 6 \quad \text{يعني} \quad \ln x + \ln(x-1) = \ln 2 + \ln 3$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{يعني} \quad x(x-1) = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1}$$

$$S = \{3\} \quad \text{و} \quad x_2 = -2 \quad \text{وبما أن} \quad x_2 = -2 \notin]1; +\infty[\quad \text{فإن} \quad x_2 = -2 \notin S$$

$$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4 \quad (2)$$

المرحلة 1: هذه المتراجحة معرفة إذا فقط إذا كان:

$$x > \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad x+1 > 0 \quad \text{أي} \quad 2x-5 > 0 \quad \text{و} \quad x > -1$$

$$\text{ومنه:} \quad D_I = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$$

المرحلة 2: حل المتراجحة: ليكن x من $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$

$$\ln((2x-5)(x+1)) \leq \ln 4 \Leftrightarrow \ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq \ln 4$$

$$2x^2 - 3x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-5)(x+1) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = -\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = 3 \quad \text{يعني} \quad x_2 = \frac{3-9}{2 \times 2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{3+9}{2 \times 2}$$

x	$-\infty$	$-3/2$	3	$+\infty$
$2x^2-3x-9$	+	0	-	+

$$S = \left[-\frac{3}{2}; 3 \right] \cap \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{5}{2}; 3 \right]$$

تمرين 8: بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$$x \rightarrow 0^+$$

الجواب: نضع: $X = \frac{1}{x}$

$$X \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X = -\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

تمرين 9: أحسب النهايات التالية: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2(x) - \ln x) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln x \quad (5)$$

الأجوبة: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{شكل غير محدد لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

تمرين 5: إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(3) \approx 1,1$

فاحسب ما يلي: $\ln(6)$, $\ln(4)$, $\ln(8)$, $\ln(72)$

$$\ln(3\sqrt{2}), \ln(\sqrt{6}), \ln(\sqrt{2}), \ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad \ln(12\sqrt[3]{3})$$

$$B = \frac{1}{4} \ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27}$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2015}$$

أجوبة:

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 \approx 1,8$$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2 \ln(2) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) \approx 3 \times 0,7 \approx 2,1$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$$

$$\ln(72) \approx 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 \approx 2,2 + 2,1 \approx 4,3$$

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \approx 1,1 - 0,7 \approx 0,4 \quad \text{و}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,7$$

$$\ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} \times 1,8 \approx 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \approx 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) \approx 1,1 + \frac{0,7}{2} \approx 1,1 + 0,35 \approx 1,45$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) = \ln(3 \times 2^2) + \ln(\sqrt[3]{3}) = \ln(3) + 2 \ln(2) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3) + 2 \ln(2) + \frac{1}{3} \ln(3)$$

$$\ln(12\sqrt[3]{3}) \approx 1,1 + 1,4 + \frac{1}{3} \times 1,1 \approx 2,86$$

$$A = \ln\sqrt{2+\sqrt{2}} + \ln\sqrt{2-\sqrt{2}} = \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$$

$$A = \ln\left(\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,35$$

$$B = -\ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27} = \frac{1}{4} \ln 3^4 + \frac{1}{2} \ln 3 - \ln\frac{1}{3^3} = \frac{1}{4} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + 3 \ln 3$$

$$B \approx 1,1 + \frac{1}{2} \times 1,1 + 3 \times 1,1 \approx 4,95$$

$$C = \ln(\sqrt{2}+1)^{2015} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2015} = \ln\left((\sqrt{2}+1)^{2015} \times (\sqrt{2}-1)^{2015}\right)$$

$$C = \ln\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^{2015} = \ln\left((\sqrt{2})^2 - 1^2\right)^{2015} = 2015 \ln(1) = 2015 \times 0 = 0$$

تمرين 6: بسط

$$B = \ln(0,01) - \ln(1000) + \ln(10^6) \quad (2) \quad A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) \quad (1)$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) = \ln(3) - \ln(5) + \ln(3 \times 5) \quad (1) \quad \text{الجواب:}$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln 3 + \ln 5 = 2 \ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$$

$$B = \ln(10^{-2}) - \ln(10^3) + \ln(10^6) = -2 \ln(10) - 3 \ln(10) + 6 \ln(10)$$

$$B = \ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$$

$$X_2 = -2 \text{ و } X_1 = \frac{3}{2} \text{ يعني } X_2 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2 \times 2} \text{ و } X_1 = \frac{-1+7}{2 \times 4}$$

$$x_2 = e^{-2} \text{ و } x_1 = e^{\frac{3}{2}} \text{ يعني } \ln x_2 = -2 \text{ و } \ln x_1 = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ e\sqrt{e}, \frac{1}{e^2} \right\} \text{ ومنه } x_2 = \frac{1}{e^2} \text{ و } x_1 = (\sqrt{e})^3 = e\sqrt{e} \text{ يعني}$$

$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \end{cases} \text{ تمرين 13: حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظام}$$

$$\begin{cases} 3\ln x + \ln y = 2 \rightarrow 1 \\ 2\ln x - \ln y = 3 \rightarrow 2 \end{cases} \text{ الجواب:}$$

نجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$$x = e \text{ يعني } \ln x = \ln e \text{ يعني } \ln x = 1 \text{ يعني } 5\ln x = 5$$

$$\text{نعوض } x = e \text{ في المعادلة الأولى فنجد : } 3\ln e + \ln y = 2$$

$$\text{يعني } \ln y = 2 - 3 \text{ يعني } \ln y = -1 \text{ يعني } y = e^{-1} \text{ يعني } y = \frac{1}{e}$$

$$S = \left\{ \left(e, \frac{1}{e} \right) \right\} \text{ ومنه :}$$

تمرين 14: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \quad (1)$$

$$X = \sqrt{x} \text{ : ضع } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x \ln x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (1) \text{ الأجوبة:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \text{ حسب الخاصية : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \log x = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - x^3 \ln x = 0 \quad (3)$$

$$X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty \quad \text{نضع : } X = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{0^+} \frac{1}{X} \ln(1 + X) = \lim_{0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ لأن}$$

$$X = \sqrt{x} \text{ : نضع } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 \quad (5)$$

$$X^2 = x \Leftrightarrow X^2 = (\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow X = \sqrt{x}$$

$$X \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = \lim_{0^+} X^2 (\ln(X^2))^2 = \lim_{0^+} X^2 (2\ln X)^2 = \lim_{0^+} 4X^2 (\ln X)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x))^2 = 4 \lim_{0^+} (X \ln X)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

تمرين 15: أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = \ln(1 + x^2) \text{ و } f(x) = x \ln x \text{ و } f(x) = x^2 - \ln x$$

$$f'(x) = (x^2 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x} \text{ الأجوبة:}$$

$$f'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = 1 \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = (\ln(1 + x^2))' = \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{1}{\ln x} \right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x (\ln(x) - 1) = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2(x) + \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x (\ln(x) + 1) = +\infty \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + 1 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ لأن}$$

$$\ln(e^3) \text{ و } \ln(e^7) \quad (1) \text{ أحسب:}$$

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة التالية : المعادلة } \ln(x) = 7$$

$$\ln(e^3) = 3 \text{ و } 7 = \ln(e^7) \quad (1) \text{ الأجوبة:}$$

$$x > 0 \quad (2)$$

$$x = e^7 \text{ يعني } \ln(x) = 7 \ln(e) \text{ يعني } \ln(x) = 7$$

$$S = \{e^7\}$$

تمرين 11: أحسب وبسط :

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) \quad A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln(e) + 4\ln(e) - (-\ln(e)) \quad (1) \text{ الجواب:}$$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - (-1) = 7$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2}\ln(e) + \ln e + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3}9\ln(e)$$

$$B = 1\ln(e) + \ln e + \frac{1}{2}\ln(e) - 3\ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

تمرين 12: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad (2) \quad \ln(2x - 1) = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\ln(2x - 1) = \frac{3}{2} \quad (1) \text{ الجواب:}$$

المرحلة 1. هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $2x - 1 > 0$

$$\text{يعني } x > \frac{1}{2} \text{ إذن : } D_E = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

المرحلة 2. حل المعادلة:

$$\ln(2x - 1) = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \text{ يعني } \ln(2x - 1) = \frac{3}{2} \ln(e) \text{ يعني } \ln(2x - 1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{يعني } 2x - 1 = e^{\frac{3}{2}} \text{ يعني } 2x - 1 = (\sqrt{e})^3$$

$$x = \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$S = \left\{ \frac{(\sqrt{e})^3 + 1}{2} \right\}$$

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x > 0$

نضع : $\ln x = X$ والمعادلة تصبح: $2X^2 + X - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

تمرين 16: حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالتين التاليتين:

$$1. I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$$

$$2. I =]0; 1[; f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

الأجوبة (1): لدينا $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2)'}{x^4 + 2}$

اذن : $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 2| + k$

يعني : $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + k$ لأن : $x^4 + 2 > 0$

$$(2) f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

اذن : $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \ln|\ln x| + k$

تمرين 17: نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$$

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f و حدد عددين حقيقيين a و b بحيث :

$$(\forall x \in D); f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$

2. استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty; -2[$

3. حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $]-\infty; -2[$ بحيث $F(-3) = \ln 2$

أجوبة : يعني $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \neq 0\}$

نبحث عن الجذور $x^2 + x - 2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان ثلاثية الحدود جذرين هما :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2 \times 1} = 1 \text{ يعني } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2 \times 1} = -2$$

$$D_f = \mathbb{R} / \{-2; 1\}$$

$$f(x) = \frac{a(x+2) + b(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{ax + 2a + bx - b}{(x-1)(x+2)} = \frac{(a+b)x + 2a - b}{(x-1)(x+2)}$$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$ نجد أن :

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-b=1 \end{cases} \text{ وجمع المعادلتين طرف لطرف نجد : } 3a=6 \text{ يعني } a=2$$

وبتعويض a بقيمتها في المعادلة الأولى نجد أن : $2+b=5$ يعني

$$b=3$$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f هي :

$$(\forall x \in D_f); f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$$

$$(2) (\forall x \in D_f); f(x) = 2 \frac{(x-1)'}{x-1} + 3 \frac{(x+2)'}{x+2}$$

ومنه : $k \in \mathbb{R}$ مع $F(x) = 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + k$

وبما أن : $x \in]-\infty; -2[$ يعني $x < -2$ اذن : $x < 1$

ومنه : $x+2 < 0$ و $x-1 < 0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي :

$$k \in \mathbb{R} \text{ مع } F(x) = 2 \ln(1-x) + 3 \ln(-x-2) + k$$

$F(-3) = \ln 2$ يعني $k = \ln 2 - 2 \ln(2^2)$ يعني $k = \ln 2 - 2 \ln(4) + 3 \ln(1) + k = \ln 2$

يعني $k = -3 \ln 2$ ومنه : $F(x) = 2 \ln(1-x) + 3 \ln(-x-2) - 3 \ln 2$

تمرين 18: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$$

1. حدد الأعداد الحقيقية a و b بحيث :

$$\forall x \in]1; +\infty[; f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$

2. استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$

حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(2) = 0$

أجوبة (1): $a + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b}{x-1} = \frac{ax - a + b}{x-1}$

بالمقارنة مع الكتابة : $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$

نجد أن : $\begin{cases} a=2 \\ -a+b=-5 \end{cases}$ نجد اذن : $a=2$ يعني $b=-3$

ومنه الكتابة الجديدة لصيغة الدالة f

هي : $(\forall x \in]1; +\infty[); f(x) = 2 - \frac{3}{x-1}$

$$(2) (\forall x \in]2; +\infty[); f(x) = 2 - 3 \frac{(x-1)'}{x-1}$$

ومنه : $k \in \mathbb{R}$ مع $F(x) = 2x - 3 \ln|x-1| + k$

وبما أن : $x \in]1; +\infty[$ يعني $x > 1$

ومنه : $x-1 > 0$ وبالتالي : مجموعة الدوال الأصلية هي :

$$k \in \mathbb{R} \text{ مع } F(x) = 2x - 3 \ln(x-1) + k$$

$F(2) = 0$ يعني $4 - 3 \ln(1) + k = 0$ يعني $k = -4$

ومنه : $F(x) = 2x - 3 \ln(x-1) - 4$

تمرين 19:

I. لتكن الدالة العددية g بحيث : $g(x) = x - \ln x$

1. حدد D_g و أحسب نهايات g عند محداث D_g

2. أحسب $g'(x)$ و أعط جدول تغيرات g

3. استنتج أن : $x > \ln x$, $\forall x > 0$

II. لتكن الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x}$, $x > 0$

$$f(0) = -1$$

1. بين أن $D_f =]0; +\infty[$

2. بين أن f متصلة في الصفر على اليمين

3. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4. بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

5. بين أن : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

6. أعط جدول تغيرات f

7. حدد نقط تقاطع C_f و المستقيم $y=1$: (Δ)

8. بين أن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة

أفصولها ينتمي إلى $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$

9. أنشئ C_f في معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (خذ $e \approx 2,7$, $\ln 2 \approx 0,7$)

I. **أجوبة (1):** $g(x) = x - \ln x$ $D_g =]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty : \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \ln x = +\infty$$

$$g'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \quad (2)$$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$: لأن $x \in]0; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

$$x + \ln x = x - \ln x \text{ يعني } \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = 1 \text{ يعني } f(x) = 1 \quad (7)$$

يعني $2\ln x = 0$ يعني $\ln x = 0$ يعني $x = 1$

أذن نقطة تقاطع C_f و المستقيم $y = 1$: (Δ) هي $A(1;1)$

(8) f دالة متصلة على المجال $D_f =]0; +\infty[$ ومنه متصلة على $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{2} + \ln 2} = \frac{1 - 2\ln 2}{1 + 2\ln 2} < 0$$

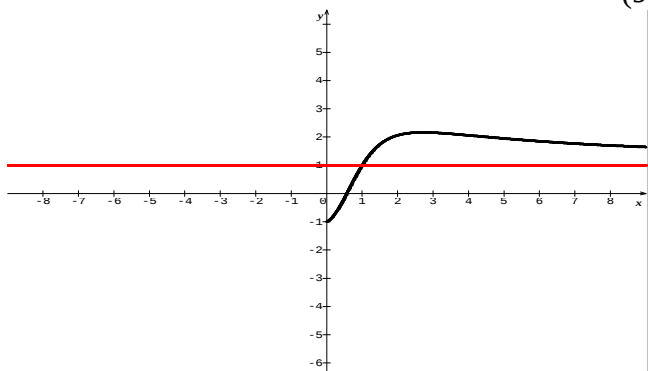
$$f(1) = \frac{\frac{1}{2} + \ln(1)}{\frac{1}{2} - \ln(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 > 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة $f(x) = 0$

حلا على الأقل على المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

أي : C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى

$$\left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad (9)$$



تمرين 20: أحسب وبسط ما يلي : $\log_8 4 (2 \log_2 4 (1$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 \quad (4 \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$A = \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3}) \quad (5)$$

$$\log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2 : 1 \text{ طريقة } \log_2 4 \quad \text{أجوبة : (1)}$$

$$\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2\log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\log_8 4 = \frac{\ln 4}{\ln 8} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2^3} = \frac{2\ln 2}{3\ln 2} = \frac{2}{3} : \log_8 4 (2$$

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^2 = -2\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -2 \times 1 = -2 \quad (3)$$

يمكن استعمال طريقة أخرى

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4 \times 1 = 4 \quad (4)$$

$$A = \log_2 \left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}(\sqrt[5]{3}) = -\log_2 5 + \log_2(5 \times 2) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}\right) \quad (5)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

(3) نلاحظ أن g تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 1$

أذن : $\forall x \in]0; +\infty[\quad g(1) \leq g(x)$: إذن $\forall x \in]0; +\infty[\quad 1 \leq x - \ln x$

أذن : $\forall x \in]0; +\infty[\quad 0 < 1 \leq x - \ln x$: إذن $\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln x < x$

$$f \text{ دالة معرفة يعني } x - \ln x \neq 0 \text{ و } x > 0 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad (1. II)$$

وحسب ماسبق وجدنا أن $0 < x - \ln x$: إذن $x - \ln x \neq 0$

ولدينا 0 لديه صورة إذن : $D_f =]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} + 1\right)}{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} + 1}{\frac{x}{\ln x} - 1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0^- \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \frac{0}{\infty} = 0 \text{ : إذن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 = f(0)$$

ومنه f متصلة في الصفر على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1 \quad (3)$$

$$\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ ومبينا : } y = 1 \text{ مقارب لمنحنى الدالة } f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x + \ln x}{x - \ln x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln x + x - \ln x}{x(x - \ln x)} \quad (4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(x - \ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x - \ln x} = 0 = f'_d(0)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x - \ln x} \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x + \ln x}{x - \ln x}\right)' = \frac{(x + \ln x)'(x - \ln x) - (x + \ln x)(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - \ln x) - (x + \ln x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{x - \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} - x + \ln x + 1 + \frac{\ln x}{x}}{(x - \ln x)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{(x - \ln x)^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{(x - \ln x)^2}$$

(6) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1 - \ln x$

$e > x \Leftrightarrow \ln e > \ln x \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0$
ومنه جدول الإشارة والتغيرات :

تمرين 21: أحسب ما يلي:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{2})(2) \quad \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10)$$

أجوبة : (1) $\log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) = \log_2\left(\frac{1}{5} \times 10\right) = \log_2(2) = 1$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{2}) = \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}(2) = -\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \times 1 = -\frac{1}{3}$$

تمرين 22: أحسب و بسط ما يلي:

$$\log_{10} 0,0001, \log_{10} 100$$

$$A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$$

أجوبة : (2) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2 \times 1 = 2$

$$\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4 \log_{10} 10 = -4$$

$$A = \log(250000) + \log \sqrt{250} - \log(125)$$

$$A = \log(5^2 \times 10^4) + \frac{1}{2} \log(5^2 \times 10) - \log(5^3)$$

$$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2}(\log 5^2 + \log 10) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 \log 10 + \frac{1}{2}(2 \log 5 + 1) - 3 \log 5$$

$$A = 2 \log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3 \log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

تمرين 23: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$$

1. $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$ حيث $\log 2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0$

أجوبة : (1) المرحلة 1: هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان:

$$2x > 0 \text{ و } x > 0$$

يعني إذا كان: $x > 0$ و $x > 0$ إذن: $D_E =]0; +\infty[$

المرحلة 2: حل المعادلة: $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

يعني $\log_3(x) - 1 = 0$ أو $\log_3(2x) = 0$ يعني $\log_3(x) = \log_3(5)$ أو

$$\log_3(2x) = \log_3(1)$$

يعني $x = 5$ أو $2x = 1$ يعني $x = \frac{1}{2}$ أو $x = 5$ ومنه: $S = \left\{\frac{1}{2}; 5\right\}$

$$2(\log x)^2 - 19 \log x - 10 = 0 \quad (2)$$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x > 0$ إذن: $D_E =]0; +\infty[$

نضع: $\log x = X$ والمعادلة تصبح: $2X^2 - 19X - 10 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 361 + 80 = 441 = (21)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = \frac{19 - 21}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ و } X_1 = \frac{19 + 21}{2 \times 2} = 10$$

يعني $\log x_2 = -\frac{1}{2}$ و $\log x_1 = 10$

يعني $x_1 = 10^{10}$ و $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ومنه: $S = \left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10}\right\}$

تمرين 24: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1$

الجواب: المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$$D_I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ يعني } x > \frac{1}{2} \text{ إذن: } x - \frac{1}{2} > 0$$

$$x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ يعني } \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ يعني } \log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 1$$

يعني $x \leq 1$ ومنه: إذن: $S =]-\infty; 1] \cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}; 1 \right]$

تمرين 125: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$\ln^2(x-1) - \ln(x-1) - 2 = 0$$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(-x+2) \leq 0$$

أجوبة : (1) $\ln^2(x-1) - \ln(x-1) - 2 = 0$

هذه المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان: $x-1 > 0$ يعني $x > 1$

نضع: $\ln(x-1) = X$ والمعادلة تصبح: $X^2 - X - 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$X_2 = -1 \text{ و } X_1 = 2 \text{ يعني } X_2 = \frac{1-3}{2 \times 1} \text{ و } X_1 = \frac{1+3}{2 \times 1}$$

يعني $\ln(x_1 - 1) = 2$ و $\ln(x_2 - 1) = -1$ يعني $x_1 - 1 = e^2$ و $x_2 - 1 = e^{-1}$

يعني $x_{1e} = e^2 + 1$ و $x_2 = \frac{1}{e} + 1$ ومنه: $S = \left\{e^2 + 1, \frac{1}{e} + 1\right\}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(-x+2) \leq 0$

المتراجحة معرفة يعني إذا كان:

$$x+1 > 0 \text{ و } -x+2 > 0 \text{ يعني } x > -1 \text{ و } x < 2$$

إذن: $D_I =]-1; 2[$

$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(-x+2) \leq 0$ يعني

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(-x+2) \text{ يعني } x+1 \geq -x+2$$

يعني $x \geq \frac{1}{2}$ ومنه: إذن: $S =]-1; 2[\cap \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[= \left[\frac{1}{2}; 2 \right[$

تمرين 26: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\ln \frac{-3x+12}{2x+2} \leq 0$

الجواب: تحديد D مجموعة تعريف المتراجحة :

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-3x+12}{2x+2} > 0\right\}$$

$x \in D$ نعتبر: $D =]-1; 4[$

$$\ln \frac{-3x+12}{2x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{-3x+12}{2x+2} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{-3x+12}{2x+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+12}{2x+2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5x+10}{2x+2} \leq 0$$

إذن: $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

ومنه: $S =]-1; 4[\cap (]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[) = [2; 4[$

تمرين 27: احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 \quad (1)$$

أجوبة : 1- حساب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3$

مباشرة: $0 \times (-\infty)$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x^3} (\ln \sqrt[3]{x^3})^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x})^3$$

$$f'(x) = \frac{\frac{6x}{3x^2+1}(3x^2+1) - 6x \ln(3x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{6x - 6x \ln(3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x(1 - \ln(3x^2+1))}{(3x^2+1)^2} \quad \text{إذن:}$$

تمارين للبحث والتثبيت

تمرين 1:

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(0)=0 \text{ و } x \neq 0 \text{ إذا كانت } f(x) = x(\ln x + 1)^2$$

1. حدد D_f .

2. أحسب: و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} x(\ln x)^2$ ثم استنتج اتصال الدالة f على اليمين في 0.

4. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

5. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول النتيجة مبيانيا.

6. تحقق أن $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x + 3)$ $\forall x > 0$.

7. حدد جدول تغيرات الدالة f .

8. حدد معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة الذي أفصولها 1.

تمرين 2:

1. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 - x)}{x}$.

2. أحسب مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x(\ln x)^4$.

تمرين 3:

$$\log 50 - \log \frac{1}{2} (3 \log 2 + \log 5 (2 \log 10^4 + \log \frac{1}{10^4}))$$

$$\log \sqrt{40} + \log \sqrt{90} - \log \frac{2}{3} (4$$

تمرين 4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية: $\log(x+3) + \log x = 1$

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2 (2 \log_4(x-1) + \log_4 2 = 1) (1$$

$$(\log x)^2 + \log x - 6 = 0 \quad (4 \log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0) (3$$

حيث $\log$ هو اللوغاريتم العشري

تمرين 5: حدد الدوال الأصلية للدالة f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{على المجال }]-\infty; 1[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 3^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} \right)^3$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x}$: نضع $t = \sqrt[3]{x}$

إذا كان: $x \rightarrow 0^+$ فإن: $t \rightarrow 0^+$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t$

و بما أن: $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 0 \quad \text{إذن:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^3 = 3^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln \sqrt[3]{x} \right)^3 = 3^3 \times 0^3$$

2- حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x}$ مباشرة: $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \sqrt[10]{x})^{10}}{\sqrt[10]{x}^{10}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10 \ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 10^{10} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10}$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}}$: نضع $t = \sqrt[10]{x}$

إذا كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن: $t \rightarrow +\infty$ ومنه: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$

و بما أن: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^{10}}{x} = 10^{10} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{x}} \right)^{10} = 10^{10} \times 0^{10}$$

3- حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$ مباشرة: $\frac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$$

حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1}$: نضع $t = 3x+1$

إذا كان: $x \rightarrow +\infty$ فإن: $t \rightarrow +\infty$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t}$

و بما أن: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{3x+1} = 0$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x+1)}{2x} = \frac{3}{2} \times 0 = 0$

تمرين 28: تحدد $f'(x)$ بحيث: $f(x) = \frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1}$

الجواب: $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(3x^2+1)}{3x^2+1} \right)'$$

$$= \frac{(3x^2+1) \ln'(3x^2+1) - (\ln(3x^2+1))' (3x^2+1)}{(3x^2+1)^2}$$