

التمرين الأول

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = 2x - \frac{1}{x} - 1 - \ln x$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(3) أحسب $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

(4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

(5) أسسم المنحنى (C_f)

التمرين الثاني

لكل f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي : $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

(1) أ- بيه أنه $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = x - 2\ln|x| - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

ب- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$: (Δ)

(4) أحسب $f'(x)$ ثم منج جدول تغيرات الدالة f

(5) أسسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

(1) حدد D_f و بيه أنه f دالة فردية

(2) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم منج جدول تغيرات الدالة f

(4) بيه أنه المستقيم $y = x$: (Δ) مقارب للمنحنى (C_f)

(5) أسسم المنحنى (C_f)

التمرين الرابع

(I) نضع $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

(1) أحسب الدالة $g'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة g

(2) استنتج أنه $\forall x \in \mathbb{R}^+ : g(x) > 0$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- بيه أنه المستقيم $y = 2x$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب (Δ)

(2) أ- بيه أنه $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

التمرين الخامس

I] لتكن g دالة عددية معرفة بما يلي: $g(x) = x - 1 - \ln x$ لكل x من $]0, +\infty[$

(1) أـ أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

بـ أحسب $g'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة g

(2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II] نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2} - x \ln x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

① أدرس اتصال وقابلية اشتقاق على يمين النقطة 0

② أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

بـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f

③ أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

④ ارسم المنحنى C_f

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$

(1) أـ حدد D_f مجموعة تعريف f

بـ أحسب نهايات الدالة f عند محددات D_f

(2) أحسب المشتقة $f'(x)$

(3) نضع $g(x) = x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$ حيث $x \in \mathbb{R}^{+*}$

أـ أحسب المشتقة $g'(x)$ وبين أن g تناقصية

بـ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ثم استنتج أن $g(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

(4) أنجز جدول تغيرات الدالة f

(5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين السابع

لتكن g دالة بحيث $g(x) = 1 - x^2 - x^2 \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, 1[$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, 1[$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{1-x^2} \ln x$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار 1

(3) أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

(4) أرسم المنحنى C_f

التمرين الثامن

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$ و $f(x) = x - 2 - 2x \ln x$ و $f(0) = -2$
- أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$
 - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$
 - أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f
 - أدرس تقعر المنحنى C_f
 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى C_f في النقطة $x_0 = 1$
 - أرسم (T) و المنحنى C_f
 - أدرس تغيرات الدالة $g(x) = \frac{\ln x}{(x-2)^2}$ و أرسم منحنائها

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x) & : x > 0 \\ f(x) = x + \ln(1-x) & : x < 0 \end{cases}$$

- أ- أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$
- ب- أدرس قابلية اشتقاق f على $\mathbb{R}$ على يسار النقطة $x_0 = 0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة
- أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ثم أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$
- ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
- أ- بين أن $\begin{cases} f'(x) = -\ln x & : x > 0 \\ f'(x) = \frac{-x}{1-x} & : x < 0 \end{cases}$
- ب- ضع جدول تغيرات الدالة f
- أ- حل في $\mathbb{R}^{+*}$ المتراجحة $f(x) > x$
- ب- أرسم المنحنى (C_f)
- نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{e}$ و $U_{n+1} = U_n - U_n \ln U_n$
- أ- بين أن $0 < U_n \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)
- ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- ج- استنتج أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين العاشر

- لتكن f دالة عددية معرفة على $\left[0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, \infty\right[$ بما يلي : $x \neq 0$ و $f(x) = \frac{x}{1 + (\ln x)}$ و $f(0) = 0$
- و ليكن (C_f) منحنائها في $\mathbb{R}^2$ ($O; \vec{i}; \vec{j}$)
- أ- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$ على يسار $x_0 = 0$
 - ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$ على يسار $x_0 = 0$

$$(2) \text{ أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x)$$

$$(3) \text{ أ- أحسب النهاية } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ب- أدرس الفرع الإنهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

$$(4) \text{ بين أن } f'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2} \text{ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة } f$$

$$(5) \text{ أرسم المنحنى } (C_f)$$

$$(6) \text{ لتكن } (U_n)_n \text{ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : } U_0 = e ; U_{n+1} = f(U_n)$$

$$\text{أ- بين أن } U_n > 1 \text{ } (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ب- أدرس رتبة المتتالية } (U_n)_n$$

$$\text{ج- استنتج أن المتتالية } (U_n)_n \text{ متقاربة و حدد نهايتها}$$

التمرين الحادي عشر

$$A. \text{ نعتبر الدالة العددية } g \text{ المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بما يلي : } g(x) = \frac{-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x}$$

$$1. \text{ بين أن } g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2} ; (\forall x > 0)$$

$$2. \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$3. \text{ أستنتج إشارة } g(x) \text{ على }]1; +\infty[$$

$$B. \text{ نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة على }]0; +\infty[\text{ بما يلي : } \begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right), x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{و } (C_f) \text{ منحنائها في } (O; \vec{i}; \vec{j})$$

$$1. \text{ بين أن } f \text{ دالة متصلة عند } 0 \text{ على اليمين}$$

$$2. \text{ بين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ (يمكنك وضع } t = \frac{2}{x} \text{ ماذا تستنتج ؟)}$$

$$3. \text{ أدرس قابلية اشتقاق } f \text{ عند } x_0 = 0 \text{ على اليمين ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة}$$

$$4. \text{ بين أن } f'(x) = g(x) ; (\forall x > 0) \text{ و ضع جدول تغيرات الدالة } f$$

$$5. \text{ أدرس تقعر المنحنى } (C_f)$$

$$1. \text{ أنشئ المنحنى } (C_f)$$

$$C. \text{ نعتبر المتتالية } (U_n)_n \text{ المعرفة بما يلي : } U_0 \in \left] 0, \frac{2}{e-1} \right[\text{ و } U_{n+1} = f(U_n)$$

$$\text{أ- بين أن } U_n \in \left] 0, \frac{2}{e-1} \right[\text{ } (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ب- بين أن } (U_n)_n \text{ تزايدية}$$

$$\text{ج- استنتج أن المتتالية } (U_n)_n \text{ متقاربة و حدد نهايتها}$$

التمرين الثاني عشر

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ بما يلي : $x \neq 0$ ، $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ و $f(0) = 0$

1- أ- بين أن f متصلة على $x_0 = 0$ و أحسب نهايات الدالة f

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $x_0 = 0$ ، وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f)

3- أ- بين أن المشتقة $f'(x) = \frac{x(-1+2\ln x)}{(\ln x)^2}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث عشر

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{-2}{x^2+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

1) أحسب نهايتي الدالة g

2) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $]0, 1[$ واستنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$ ؛ $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ و $f(0) = 0$

1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أتحقق أن $f(x) = x \ln(x^2+1) - 2x \ln x$ ($\forall x > 0$)

ب- بين أن f متصلة على $x_0 = 0$

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $x_0 = 0$

3) بين أن $g(x) = f'(x)$ ($\forall x > 0$) ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha = 0,5$ و $f(\alpha) = 0,8$)

التمرين الرابع عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة $g(x) = x - 1 - 2x \ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ؛ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$

2) أ- أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α في المجال $]0, e^{-\frac{1}{2}}[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(1) = 0$)

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f(x) = 1 + x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ و أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

2) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$

ب- أدرس رتبة الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

3) أ- تحقق أن $f(x) - x = \frac{g(x)}{x}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $y = x$ (D)

ب- أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha = 0,3$)

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

أ. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha < u_n \leq 1$

ب. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

ج. استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الخامس عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالتين g, h المعرفتين على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$h(x) = x + (x-2)\ln x \quad \text{و} \quad g(x) = x - 1 - \ln x$$

(1) أ. أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم أدرس منحنى تغيرات الدالة g

ب. استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

(2) أ. بين أن $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب. بين أن $(x-1)\ln x \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

(3) استنتج أن $h(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$

(1) أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة

ب. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

(2) أ. بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f

(3) أ. أعط معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة ذات الأفصول 1

ب. تحقق أن $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

ج. أدرس إشارة $f(x) - x$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى C_f والمستقيم $y = x$ (Δ)

(4) أرسم المنحنى C_f والمستقيم (Δ) (نقبل أن C_f يقبل نقطة انعطاف أفصولها محصور بين 1 و 1,5)

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0 = \sqrt{e}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) بين بالترجع أن $1 < U_n < e$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية (يمكن استعمال السؤال 3 ج. من الجزء الثاني)

(3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

الجزء الرابع : ليكن (Δ_f) الحيز المستوي المحصور بين المنحنى C_f والمستقيم $y = x$ والمستقيمين $x = 1$ ،

$$x = e$$

(1) أ. باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل $\int_1^e \ln x \, dx$

ب. باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$

(2) أ. تحقق أن الدالة $G(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ دالة أصلية للدالة $g(x) = x \ln x$

ب. أحسب التكامل $\int_1^e x \ln x \, dx$

(3) استنتج مساحة الحيز (Δ_f)