

الدوال اللوغارتمية السلسلة 1 (5 تمارين)

التمرين 1 :

الجزء الأول

- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$
- (1) أدرس تغيرات g على $]0, +\infty[$
 - (2) بين أنه يوجد على α وحيد من $]0, +\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$
 - (3) أدرس إشارة $g(x)$ على $]0, +\infty[$

الجزء الثاني

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$
- و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم حدد الفروع اللانهائية ل (C_f)
 - (2) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$
 - (3) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة ثم ضع جدول تغيرات f
 - (4) أنشئ (C_f) (نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$)

الجزء الثالث

- ليكن n من $\mathbb{N}^*$
- نرمز ب $\mathcal{D}$ الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = n$ و $x = 1$
- (1) بين أن مساحة هذا الحيز ب cm^2 هي : $I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$
 - (2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$
 - (3) استنتج تعبير I_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

التمرين 2 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + \ln(1+x)$
و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و (D) المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

- (1) أ. أدرس تغيرات f
ب. أحسب نهايات f عند محددات D_f
- (2) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = f(x) - x$

أ. أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$

ب. حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

- ج. أدرس تغيرات g ثم ضع جدول تغيراتها
- د. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha \leq 0$ و $2 \leq \beta \leq 3$
- هـ. أدرس إشارة $g(x)$ و استنتج الوضع النسبي ل (C_f) و (D)

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

- (1) بين أن : $2 \leq u_n \leq \beta$ لكل n من $\mathbb{N}$
- (2) هل $(u_n)_n$ متقاربة ؟ علل جوابك

التمرين 3 :

الجزء الأول

- لتكن U الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $U(x) = \ln(x) + x - 3$
- (1) بين أن U تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$
 - (2) بين أن المعادلة $U(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0, +\infty[$ ثم تحقق أن $2 < \alpha < 3$
 - (3) استنتج إشارة $U(x)$ على $]0, +\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$(1) \text{ أحسب } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$(2) \text{ أ- بين أن لكل } x \text{ من }]0, +\infty[: f'(x) = \frac{U(x)}{x^2}$$

ب- استنتج تغيرات f على $]0, +\infty[$

الجزء الثالث

لتكن $g(x) = \ln(x)$: بما يلي $]0, +\infty[$

ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$(1) \text{ بين أن لكل } x \text{ من }]0, +\infty[: f(x) - g(x) = \frac{2 - \ln x}{x}$$

وحيدة يتم تحديدها .

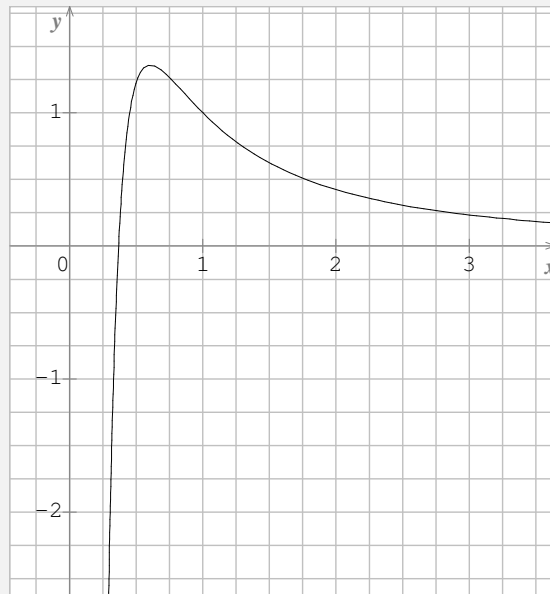
$$(2) \text{ بين أن } H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2 \text{ دالة أصلية للدالة } h : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ على }]0, +\infty[$$

$$(3) \text{ أحسب التكامل على } I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx \text{ ثم أول مبياتيا هذه النتيجة}$$

التمرين 4 :

لتكن f الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$. وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (أنظر الشكل أسفله)



- (1) أ- أدرس نهاية f في 0 على اليمين
ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
ج- حدد مقاربات (C_f)
- (2) أ- بين أن : $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0, +\infty[$
ب- حل في $]0, +\infty[$ المتراجحة $-1-2\ln x > 0$. و استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0, +\infty[$
ج- ضع جدول تغيرات f
- (3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثيتها
ب- استنتج إشارة $f(x)$ على $]0, +\infty[$
- (4) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نرمز بـ I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = n$ و $x = \frac{1}{e}$.
أ- بين أن $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$
ب- بين أن $F : x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$
ج- أحسب I_n بدلالة n
د- أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

الجزء الأول

- (1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 2 > 0$
- (2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أدرس تغيرات f
- (3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- (4) أدرس الفروع اللانهائية لـ (C_f)
- (5) بين أن $(D) : x = 1$ هو محور تماثل لـ (C_f)
- (6) مثل مبيانيا (C_f) و $(\Delta) : y = x$

الجزء الثاني

نضع $\varphi(x) = f(x) - x$

- (1) أحسب $\varphi'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج أن φ تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$
- (2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$

ب- بين أن لكل $x > 0$: $\varphi(x) = x \left[\frac{2 \ln x}{x} + \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x} - 1 \right]$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$

ج- بين أن $y = x$: (Δ) يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $0,3 < \alpha < 0,4$