

المتتاليات

التمرين 1

تمرين :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

(1) تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$

(2) بين بالترجع لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

(3) بين أن (u_n) تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة

(4) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 1$

أ. باستعمال السؤال (1) بين أن (v_n) هندسية محدداً أساسها و حدّها الأول

ب. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ج. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التصحيح

(1) ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} - 1 \\ &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5-8}{8} \\ &= \frac{3}{8}u_n - \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{8}(u_n - 1) \end{aligned}$$

إذن نستنتج : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$

(2)

- من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2$ إذن $u_0 > 1$
- ليكن $n \in \mathbb{N}$
- ✓ نفترض أن : $u_n > 1$
- ✓ و نبين أن : $u_{n+1} > 1$
- حسب نتيجة السؤال (1) لدينا : $u_{n+1} - 1 = \frac{3}{8}(u_n - 1)$
- و حسب الافتراض ، لدينا $u_n > 1$
- إذن $u_n - 1 > 0$
- إذن $\frac{3}{8}(u_n - 1) > 0$
- و منه $u_{n+1} - 1 > 0$ أي $u_{n+1} > 1$
- نستنتج : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 1$

(3)

- ليكن $n \in \mathbb{N}$
- $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{8}u_n + \frac{5}{8} - u_n \\ &= \frac{3-8}{8}u_n + \frac{5}{8} \\ &= \frac{-5}{8}u_n + \frac{5}{8} \\ &= \frac{-5}{8}(u_n - 1) \end{aligned}$$
- حسب نتيجة السؤال (2) لدينا : $u_n > 1$ إذن $u_n - 1 > 0$ و منه $\frac{-5}{8}(u_n - 1) < 0$
- و بالتالي لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n < 0$
- نستنتج أن : (u_n) تناقصية قطعاً .
- بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة.

(4) أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\&= \frac{3}{8}(u_n - 1) \\&= \frac{3}{8} \times v_n\end{aligned}$$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{3}{8} \times v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{8}$ و حده الأول v_0 حيث : $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

ب. ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{8}\right)^n \quad \blacksquare \text{ لدينا :}$$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$

لدينا : $u_n = v_n + 1$ إذن $v_n = u_n - 1$ $\blacksquare$

و منه لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1$

ج. بما أن $-1 < \frac{3}{8} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + 1 = 1$

و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$

المتتاليات

التمرين 2

تمرين :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{9}{2} \\ u_{n+1} = \frac{10u_n - 16}{u_n + 2} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{array} \right. \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

(1) بين بالترجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 4$

(2) أدرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \leq \frac{9}{2}$

(3) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

(4) لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 4}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ. بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول

ب. أكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ج. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

د. نضع $w_n = \ln(u_n)$ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

التصحيح

(1)

▪ من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \frac{9}{2}$ إذن $u_0 > 4$

▪ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

✓ نفترض أن : $u_n > 4$

✓ و نبين أن : $u_{n+1} > 4$

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 4 &= \frac{10u_n - 16}{u_n + 2} - 4 \\ &= \frac{10u_n - 16 - 4u_n - 8}{u_n + 2} \\ &= \frac{6u_n - 24}{u_n + 2} \\ &= \frac{6(u_n - 4)}{u_n + 2} \end{aligned}$$

حسب الافتراض لدينا : $u_n > 4$ إذن $u_n - 4 > 0$ و $u_n + 2 > 0$ و منه $\frac{6(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$

إذن : $u_{n+1} - 4 > 0$ و بالتالي : $u_{n+1} > 4$

▪ نستنتج : $u_n > 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

(2) ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{10u_n - 16}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{10u_n - 16 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} \\ &= \frac{-u_n^2 + 8u_n - 16}{u_n + 2} \\ &= \frac{-(u_n - 4)^2}{u_n + 2} \end{aligned}$$

بما أن $\frac{-(u_n - 4)^2}{u_n + 2} < 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن : $u_{n+1} < u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية قطعا

▪ بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية فإن : $u_n \leq u_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و منه $u_n \leq \frac{9}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

(3) بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية و مصغرة (بالعدد 4) فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

(4)

أ. ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 4} \\ &= \frac{10u_n - 16}{u_n + 2} \\ &= \frac{10u_n - 16}{6(u_n - 4)} \\ &= \frac{10u_n - 16}{6(u_n - 4)} \\ &= \frac{5u_n - 8}{3(u_n - 4)} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5u_n - 8}{3(u_n - 4)} - \frac{u_n}{u_n - 4} = \frac{5u_n - 8 - 3u_n}{3(u_n - 4)} = \frac{2u_n - 8}{3(u_n - 4)} = \frac{2(u_n - 4)}{3(u_n - 4)} = \frac{2}{3}$$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$.

و بالتالي المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية أساسها $r = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 4} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{2} - 4} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}} = 9$

ب.

▪ لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = v_0 + nr$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = 9 + \frac{2n}{3}$

▪ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا :

$$\begin{aligned}v_n &= \frac{u_n}{u_n - 4} \\ \Leftrightarrow (u_n - 4)v_n &= u_n \\ \Leftrightarrow u_n v_n - 4v_n &= u_n \\ \Leftrightarrow u_n v_n - u_n &= 4v_n \\ \Leftrightarrow u_n (v_n - 1) &= 4v_n \\ \Leftrightarrow u_n &= \frac{4v_n}{v_n - 1}\end{aligned}$$

إذن :

$$u_n = \frac{4\left(9 + \frac{2n}{3}\right)}{\left(9 + \frac{2n}{3}\right) - 1} = \frac{36 + \frac{8n}{3}}{8 + \frac{2n}{3}} = \frac{108 + 8n}{24 + 2n}$$

$$\text{نستنتج أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{54 + 4n}{12 + n}$$

$$\text{ج. لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{54 + 4n}{12 + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{n}$$

إذن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

$$\text{د. لدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4 \text{ و الدالة } \ln \text{ متصلة في } 4$$

$$\text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(4)$$