

متتاليات عددية

ب- استنتج أنه $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq 4 - U_n \leq 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 2 \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 9} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

1- أ- يبي بالترجع أنه : $u_n > \sqrt{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- يبي أنه المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.

ج- استنتج أنه المتتالية (u_n) متقاربة.

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$$v_n = u_n^2 - 3 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

أ- أثبت أنه المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها

ب- احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الخامس

1- لنك f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [0, 1]$

$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9} \text{ بما يلي :}$$

يبي f تزايدية على المجال I و أنه يبي أنه : $f(I) \subset I$

2- نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

أ- يبي أنه : $0 \leq U_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ب- يبي أنه (U_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة.

ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين السادس

(U_n) متتالية حيث : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n + U_n^2$

(1) يبي أنه $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية

(2) يبي أنه $U_n^2 \geq U_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

و استنتج أنه $U_{n+1} \geq 2U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

(3) يبي أنه $U_n \geq 2^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$$

1 [احسب u_1 و u_2 و u_3 .

2 [نضع $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

يبي أنه المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ حسابية محددا أساسها

3 [احسب v_n بدلالة n .

4 [استنتج u_n بدلالة n .

5 [احسب بدلالة n المجموع

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

التمرين الثاني

لنك $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

(1) يبي أنه $U_n > 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$

(3) نضع $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(4) أ يبي أنه $(V_n)_n$ متتالية حسابية و احسب V_n بدلالة n

ب) حدد الحد العام U_n بدلالة n و احسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثالث

لنك $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{4}{U_n} \end{cases}$$

(1) يبي أنه $2 \leq U_n < 4$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$

(3) نضع $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(4) أ يبي أنه $(V_n)_n$ متتالية هندسية و احسب V_n بدلالة n

ب) حدد الحد العام U_n بدلالة n و احسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(5) أ- يبي أنه $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

التمرين العاشر

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n^2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 [أحسب u_1 و u_2 .

2 [أ- أثبت أنه $0 < u_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- يبي أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية ثم استنتج أنه

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{1}{2} .$$

3 [أ- يبي أنه $1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{5}(1 - u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ب- استنتج أنه $1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n (1 - u_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4 [يبي أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الحادي عشر

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \sqrt{4 - U_n} \\ U_0 = 1 \end{cases}$

و نضع $f(x) = x\sqrt{4-x}$

1 [أ- أدرس اتصال الدالة f على $[0, 4]$

ب- يبي أن f تزايدية على المجال $[1, 3]$ و استنتج أنه

$$f([1, 3]) \subseteq [1, 3]$$

2 [أ- يبي أنه $1 \leq U_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

أ- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين السابع

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث :

$$U_{n+1} = U_n^2 + \frac{1}{2}U_n \quad \text{و} \quad U_0 = \frac{1}{4}$$

1 [أ- أحسب U_1 , U_2

ب- يبي أنه $0 < U_n \leq \frac{1}{4} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2 [يبي أن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

3 [أ- يبي أنه $U_{n+1} \leq \frac{3}{4}U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- يبي أنه $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ثم حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

التمرين الثامن

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$ و

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{حيث أن} \quad f(x) = \frac{6x-1}{x+2}$$

1 [يبي أن الدالة f تزايدية على المجال $I = [2, 4]$

2 [أ- يبي أنه $2 < U_n < 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أحسب U_1 و يبي أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3 [استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

1 [أ- يبي أنه $f'(x) = \frac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}$

ب- استنتج أن f تزايدية على المجال $I = [-2, -1]$

و أنه $f(I) \subseteq I$

2 [$(U_n)_n$ متتالية معرفة بـ : $U_0 = -2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- يبي أنه $-2 \leq U_n \leq -1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- يبي أن $(U_n)_n$ متتالية تزايدية

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها