

المتاليات العددية

تمرين 1

لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ متالتين عدديتين معرفتين

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u = 1 \\ u = \frac{u+2v}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} v = 12 \\ v = \frac{u+3v}{4} \end{cases} \quad \text{بما يلي}$$

1- نضع $w_n = v_n - u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

أ- بين أن $(w_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية وأحسب w_n بدلالة n

ب- حدد $\lim w_n$

2- أ- بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تزايدية وأن $(v_n)_{n \geq 1}$

متتالية تناقصية

ب- بين أن $u_n < v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ج- استنتج أن $(w_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ متقاربتين

تمرين 2

$$\begin{cases} u_0 = -1 ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- نعتبر المتالتين (a_n) و (b_n) حيث

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n ; b_n = 2^n u_n$$

أ- بين أن (a_n) متتالية هندسية وأحسب a_n بدلالة n

ب- بين أن (b_n) متتالية حسابية وأحسب b_n بدلالة n

ج- استنتج u_n بدلالة n

$$3- \text{ أ- بين بالترجع } \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$$

ب- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ ثم $\lim u_n$

تمرين 3

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ:

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$$

1- بين أن $u_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2- أدرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3- استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

$$\text{ أ- بين أن لكل } n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

$$\text{ ب- استنتج : } (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين 4

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

$$1) \text{ بين أن : } \sqrt{2} < u_n \leq \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

2) بين أن (u_n) تناقصية قطعاً و استنتج أن (u_n) متقاربة
3) أ. بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(u_n - \sqrt{2} \right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ب. استنتج : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})$

ت. استنتج : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{n-1}} (u_1 - \sqrt{2})$

ث. استنتج $\lim u_n$

تمرين 5

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

1) ضع جدول تغيرات f .

2) نعتبر المجال $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ بين أن $f(I) = I$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{4}u_n \text{ و } u_0 = \frac{1}{5}$$

أ. بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

ب. ادرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ت. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

تمرين 6

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1- بين أن $u_n < 2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2- بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية تزايدية و استنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$

متتالية متقاربة .

3- استنتج $\lim u_n$

تمرين 7

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$$

1- أحسب u_1 ; u_2 .

2- بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

3- بين أن $u_{n+1} > 2u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ و استنتج

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3 \times 2^n$$

4- أحسب $\lim u_n$

تمرين 8

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$u_0 = -\frac{5}{4} \quad u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$$

1- بين أن $-2 < u_n < -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تناقصية و استنتج أن (u_n)

متقاربة .

4- أحسب $\lim u_n$

تمرين 9

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

1- بين بالترجع أن $0 < u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2- تأكد أن $u_{n+1} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$ ثم استنتج أن (u_n) متتالية تزايدية.

3- أ- تأكد أن $\frac{1}{2 + \sqrt{u_n + 2}} < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ثم بين أن

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$$

ب- بين أن $0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ثم

استنتج $\lim u_n$

تمرين 10

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ: $u_1 = 1$ ولكل

$$u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \quad : n \in \mathbb{N}^*$$

1) - أحسب u_2 و u_3

2) - نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أ - بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية محددًا أساسيًا وحدها الأول

ب - - أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

ج - هل $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة

تمرين 11

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = 3 - \frac{9}{4x} \quad \text{بما يلي}$$

1) ضع جدول تغيرات الدالة f .

2) نضع $I = \left] \frac{3}{2}, 3 \right]$

أ - بين أن $f(I) \subset I$

ب - بين أن $f(x) < x \quad (\forall x \in I)$

II - لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بما

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} \end{cases}$$

1) أ رسم التمثيل المياني للدالة f و المستقيم ذي

المعادلة $y = x$. مثل على محور الأفافيل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) .

2) بين بالترجع أن $\frac{3}{2} < u_n \leq 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

3) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية. استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها.

4) نضع $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ - بين أن المتتالية (v_n) حسابية محددًا أساسيًا وحدها الأول.

ب - أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .

ج - أحسب من جديد $\lim u_n$.

تمرين 12 (بعد درس الدوال اللوغاريتم و الاسية)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1} \end{cases}$$

1. بين بالترجع أن $1 < u_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

2.

أ. بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{u_n - 1} (1 - \sqrt[3]{u_n - 1}) (1 + \sqrt[3]{u_n - 1})$$

ii. استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية.

iii. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \ln(u_n - 1)$$

أ. تحقق أن $v_0 = -\frac{1}{3}$ ثم بين أن (v_n) متتالية

هندسية محددًا أساسيًا $\frac{1}{3}$.

ii. استنتج أن $\ln(u_n - 1) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

iii. احسب u_n بدلالة n .