

تمرين 1

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 6} \quad \text{نضع}$$

(1) (a) بين أن $-\frac{1}{2} < u_n < -3$; $(\forall n \in \mathbb{N})$. (b) ادرس رتبة (u_n)

(2) (a) بين أن $u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}(u_n - \frac{1}{2})$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(3) (a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

(c) أحسب $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $\lim S_n$.

(d) أحسب $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$.

تمرين 2

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2} \quad \text{ونضع} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

(1) بين أن $u_n > 2$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n)

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(4) (a) بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) أحسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

تمرين 3

$$f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .

(2) بين أن f تقابل من $[0, \sqrt[3]{2}]$ نحو مجال يجب تحديده .

(3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) بين أن : $1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(b) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 4

$$u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4 \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

(a) بين أن $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

(b) بين أن $f(x) \geq x$; $(\forall x \in \mathbb{R})$.

(c) استنتج أن $1 \leq u_n \leq 2$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ وأن (u_n) تناقصية .

(d) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 5

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) بين أن : $u_n > 3$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(2) ادرس رتبة المتتالية (u_n) .

(3) بين أن : $u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

(4) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq (\frac{3}{2})^n + 3$

(5) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

تمرين 6 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}u_n^3 + 2}$

(1) بين : أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 1$ (2) ادرس رتبة (u_n)

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $v_n = u_n^3 - 3$

(a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية

(b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n

تمرين 7 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي: $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n}$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : u_n \leq 0$ (2) ادرس رتبة (u_n)

(3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $v_n = \frac{4 - u_n}{n}$.

(a) بين أن المتتالية (v_n) هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب (v_n) ثم (u_n) بدلالة n واستنتج $\lim u_n$ و $\lim v_n$.

تمرين 8 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = -\frac{1}{3}$ و $u_{n+1} = 1 - \sqrt[3]{5 - 3u_n}$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 < u_n < 0$ (2) ادرس رتبة (u_n)

(2) (a) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n + 1 < (\frac{3}{4})^n \cdot \frac{2}{3}$.

(b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 9 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 2$ (2) ادرس رتبة (u_n) .

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(4) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

(b) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

(5) نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n \geq 2n - 3 + 5(\frac{4}{5})^{n+1}$

(b) واستنتج $\lim S_n$

تمرين 10 نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 2$ (2) ادرس رتبة المتتالية (u_n)

(3) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

(4) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$.

(5) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 11 نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (\sqrt{x+1}-1)^3$

- (1) حدد حيز تعريف الدالة f .
 (2) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[-1, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده . (b) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

(3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) بين : أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 < u_n < 0$
 (b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .
 (c) حل في $[-1, +\infty[$ المعادلة $f(x) = x$ (ضع $t = \sqrt{x+1}-1$)
 (d) بين أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

تمرين 12 نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$.

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (1) ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$.
 (b) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.
 (c) بين أن $(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.

(2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

(3) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

- (b) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة واحسب نهايتها .

تمرين 13 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$$

- (1) ادرس تغيرات $f(x) = \sqrt{6-x}$ وحدد $f([0, 6])$.
 (2) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq u_n \leq 6$.
 (3) نضع $w_n = u_{2n+1}$ و $v_n = u_{2n}$ بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n \leq w_n$ وأن (v_n) تزايدية و w_n تناقصية .
 (4) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.
 (5) بين أن (v_n) و (w_n) متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة .

تمرين 14 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :
$$a > 0 : \begin{cases} u_0 \geq \sqrt[3]{a} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + \frac{a}{u_n^2}) \end{cases}$$

- (1) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$.
 (b) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{(2u_n + \sqrt[3]{a})}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{a})^2$
 (c) قارن بين $\sqrt[3]{a}$ و u_n وبين أن (u_n) متقاربة .
 (2) بين أن $u_{n+1} - \sqrt[3]{a} - \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{a}) \leq 0$. واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 15

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{2} < x_n < 1$$

لتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة وتحقق

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}} \end{cases} \quad \text{ونعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- (1) (a) بين أن المتتالية (u_n) محدودة بـ 0 و 1 .
 (b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية واستنتج أن (u_n) متقاربة.
 (2) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n(-1 + u_n u_{n-1}) = u_{n-1} - u_n$
 (b) استنتج $\lim u_n$

تمرين 16

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$(a < b) \quad \begin{cases} u_0 = a, \quad v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

- (1) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < v_n$.
 (b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و (v_n) تناقصية .
 (c) استنتج أن (u_n) و (v_n) متقاربتان .
 (2) نضع $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.
 (a) بين أن المتتالية (w_n) هندسية و (t_n) ثابتة
 (b) احسب u_n و v_n بدلالة n . ثم احسب $\lim u_n$ و $\lim v_n$

تمرين 17

نعتبر المتتاليات (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 20 ; \quad u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1} \end{cases}$$

- (1) بين أن (v_n) و (w_n) متتاليتين هندسيتين.
 (2) احسب w_n ; v_n ثم u_n بدلالة n . واحسب $\lim u_n$.
 (3) احسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة u_n واستنتج $\lim S_n$.

تمرين 18

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2)$

- (1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n < 4$.
 (2) ادرس رتبة المتتالية (u_n) .
 (3) (a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$.
 (b) استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 19

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + n^2) \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \geq 0} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - (\frac{n^2 - 3n + 3}{2})$
 (a) بين أن (v_n) متتالية هندسية حدد أساسها وحدها الأول .
 (b) احسب v_n ثم u_n بدلالة n .

تمرين 20

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3+2u_n} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- (1) بين أن (u_n) موجبة وتناقصية .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$
- (a) بين أن (v_n) متتالية هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .
- (b) احسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.
- (3) احسب بدلالة n $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$.

تمرين 21

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة ب :}$$

- ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = u_n^2 - 4$
- (1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .
- (2) احسب v_n ثم u_n بدلالة n واستنتج $\lim u_n$.
- (3) احسب $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ بدلالة n .

تمرين 22

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- (1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq 2$.
- (2) (a) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .
- (b) بين أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim u_n$.
- (3) (a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
- (b) استنتج بطريقة أخرى أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim u_n$.

تمرين 23

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- (1) بين أن $f([2,3]) \subset [2,3]$
- (2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة ب : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \end{cases}$
- (a) بين أن المتتالية (u_n) مصغرة بالعدد 2 .
- (b) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية .
- (c) بين أن (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim u_n$.

تمرين 24

$$f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة f .
- (2) بين أن f تقابل من $[0, \sqrt[3]{2}]$ نحو مجال يجب تحديده .
- (3) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
- (a) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$.
- (b) بين أن (u_n) تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب $\lim u_n$.

تمرين 25

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي ونضع $v_n = u_{n+1} - u_n$.
$$\begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .

(2) عبر عن v_n ثم عن u_n بدلالة n .

(3) أحسب $\lim u_n$.

(4) أحسب $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n .