

الأستاذ:  
نجيب  
عثماني

**سلسلة رقم 4: المتتاليات العددية**  
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة  
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية  
الجهة  
الشرقية

3. أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين 9:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$

2. بين أن:  $u_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

4. أحسب  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

5. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

6. أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين 10:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$$

1. بين أن:  $u_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

4. أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين 11:** أحسب النهاية التالية:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

**تمرين 12:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3}$$

بين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

**تمرين 13:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

1) أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  (2) استنتج:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n + 2(-1)^n$

**تمرين 1:** أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} + 5 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4}{n^3} - 7 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3$$

**تمرين 2:** حدد من بين المتتاليات التالية المتتاليات المتقاربة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 7n \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n^2} + \frac{5}{n} + 2 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{n} + n$$

**تمرين 3:** أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$$

**تمرين 4:** أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{7}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)^2 - (n-1)^2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

**تمرين 5:** [حسب النهايات التالية:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$ ]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$$

**تمرين 6:** أحسب النهايات التالية:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$$

**تمرين 7:** أحسب النهايات التالية:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{\frac{6}{7}}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{\frac{4}{3}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n)^{\frac{3}{5}} - (n)^{\frac{1}{3}} + 4$$

**تمرين 8:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3 + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{1 + u_n}$

1. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

2. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**تمرين 14 :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2$$

1. بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$  استنتج :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq \frac{4}{3}n^2 + 2$

**تمرين 15 :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 3n + 5 \sin n$$

1. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq 3n - 5$

2. استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين 16 :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -4n + 3 \cos n$$

1. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq -4n + 3$

2. استنتج :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**تمرين 17 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{كالتالي :}$$

1. بين أن المتتالية  $(u_n)$  مكبورة بالعدد 4

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

3. ماذا تستنتج ؟

**تمرين 18 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \text{كالتالي :}$$

1. بين أن المتتالية  $(u_n)$  مكبورة بالعدد 2

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

3. ماذا تستنتج ؟

**تمرين 19 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$

2. بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2$

3. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  ماذا تستنتج ؟

4. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

5. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

6. أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  ثم  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين 20 :** نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \cos \left( \frac{(0,1)^n + \pi}{(0,1)^n + 4} \right) \quad \text{أحسب } v_n$$

**تمرين 21 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$u_1 = 1 \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1. بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq 2$

2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة

3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{على المجال } I = ]-\infty; 2]$$

(أ) بين أن  $f(I) \subset I$  و أن  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$

(ب) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين 22 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{-1}{2+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \text{المعرفة كالتالي :}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

3. بين بالترجع أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3n+2}{3n+1}$

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

5. استنتج طريقة أخرى لكتابة  $u_n$  بدلالة  $n$

**تمرين 23 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \text{المعرفة كالتالي :}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$  بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1$

3. أحسب  $v_{n+1} - v_n$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

5. أحسب  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$

6. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

**تمرين 24 :** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{6}{1+u_n} \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{المعرفة كالتالي :} \quad \text{ونعتبر المتتالية}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \quad \text{المعرفة كالتالي :}$$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و حدد أساسها  $q$  و حدها الأول

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

4. أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

**تمرين 25:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب  $u_2$  و  $v_1$
2. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية و حدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**تمرين 26:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. أحسب  $u_1$  و  $v_0$
2. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية و حدد أساسها وحدها الأول
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**تمرين 27:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة

$$\text{كالتالي : } \begin{cases} u_{n+1} = -1 - \frac{1}{4u_n} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{2}{2u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$
2. بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية
3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**تمرين 28:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$

$$\text{المعرفة كالتالي : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. بين أن :  $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$
3. أبين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و حدد أساسها وحدها الأول
4. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

**تمرين 29:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n(3 - \sin n)}$$

**تمرين 30:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. بين أن  $0 \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  ماذا تستنتج؟

**تمرين 31:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

1. بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية ومصغرة
2. ماذا نستنتج؟

**تمرين 32:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$u_0 = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$$

1. بين أن  $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة
3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :  $f(x) = \sqrt{x+6}$  على المجال  $I = [0, 3]$

(a) بين أن  $f(I) \subset I$  و أن  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$

(b) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين 33:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$u_0 = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

1. بين بالترجع أن  $u_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة
3. أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين 34:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$u_0 = \frac{5}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$$

4. بين أن  $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
5. أدرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة
6. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة ب :

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \quad \text{على المجال } I = ]-\infty; 2]$$

(ت) بين أن  $f(I) \subset I$  و أن  $f$  دالة متصلة علي مجال  $I$

(ث) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**تمرين 35:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. بين أن  $f$  تقابل من  $[0; \sqrt[3]{2}]$  نحو مجال يجب تحديده.
3. نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{المعرفة بما يلي :}$$

- أ. بين أن :  $1 \leq u_n \leq \sqrt[3]{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ .
- ب. بين أن  $(u_n)$  تزايدية و استنتج أنها مقاربة و أحسب  $\lim u_n$ .