

### 2- صفة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتالية

#### حسابية خاصة

اذا كان  $(u_n)_{n \geq p}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فان

$$\forall n \geq p \quad u_n = u_p + (n-p)r$$

**ملاحظة** - اذا كان  $(u_n)_{n \geq p}$  متتالية حسابية أساسها  $r$

$$\forall n \geq q \geq p \quad u_n = u_q + (n-q)r$$

**خاصية** لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية

اذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فان

$$S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$$

هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول

للمجموع  $S_n$  و  $u_{n-1}$  هو الحد الأخير للمجموع

$$S_n = \frac{(S_n - \text{عدد حدود } S_n)}{2} - (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول ل } S_n)$$

### II- المتالية الهندسية

#### 1- تعريف

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هندسية اذا كان يوجد عدد

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = q u_n$$

حيث  $q$  العدد يسمى أساس المتتالية.

### 2- صفة الحد العام - مجموع حدود متتابعة لمتالية

#### هندسية خاصة

اذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فان

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

**ملاحظة** - اذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية

$$\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$$

اساسها  $q$  فان **خاصية**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1

اذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فان

$$S_n = u_p \left( \frac{1 - q^{n-p}}{1 - q} \right)$$

هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول

للمجموع

**ملاحظة** اذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1

فان  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

**حالة خاصة** اذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها

$$1 \text{ فان } S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n - p)$$

### A- تذكرة

#### أنشطة تذكرة

**نشاط 1:** نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين بـ

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \begin{cases} u_0 = 1 & ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- بين أن  $(v_n)$  متتالية ثابتة.

2- استنتج أن  $(u_n)$  متتالية حسابية و عدد عناصرها المميزة

$$3- \text{أحسب } S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i \text{ بدلالة } n$$

**نشاط 2:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب  $u_3$  ;  $u_2$

2- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  مكبورة بالعدد 3

3- أدرس رتبة  $(u_n)_{n \geq 1}$  و استنتج أن  $(u_n)$  مصغرورة 2 بالعدد

4- نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بـ 3

أ- بين أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية و أحسب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

$$b- \text{أحسب } S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i \text{ بدلالة } n$$

### 1- المتالية المكبورة-المصغرورة-المحدودة

\* تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  مكبورة اذا وفقط اذا وجد

$\forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M$  بحيث  $M$  عدد حقيقي

\* تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  مصغرورة اذا وفقط اذا وجد

$\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq m$  بحيث  $m$  عدد حقيقي

\* تكون المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  محدودة اذا وفقط اذا كانت

$(u_n)_{n \geq n_0}$  مكبورة و مصغرورة

### 2- المتالية ال遞

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متالية

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$  متالية تزايدية

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$  متالية تزايدية قطعا

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$  متالية تناقصية

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$  متالية تناقصية قطعا

$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \geq n_0}$  متالية ثابتة

### I- المتالية الحسابية

#### 1- تعريف

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  حسابية اذا كان يوجد عدد

حيث  $r$   $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد  $r$  يسمى أساس المتتالية.

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند  $+\infty$

$$\text{نكتب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \text{ باختصار}$$

**نشاط** نعتبر المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  حيث  $u_n = n^2$  و  $v_n = \frac{1}{n} + 3$   $\forall n \in \mathbb{N}^*$   $\lim v_n = +\infty$   $\lim u_n = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$  نعلم أن  $\lim v_n = 3$  إذن  $\lim u_n = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  نعلم أن  $\lim u_n = +\infty$  إذن  $\lim v_n = 3$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$  نعلم أن  $\lim u_n = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  نحدد  $\lim v_n$  و  $\lim u_n$

### 1- تعريف نهاية متتالية

نقول ان نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  تؤول إلى  $l$  إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح مركزه  $l$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة. نكتب  $\lim_{n \geq n_0} u_n = l$

### 2- تعريف نهاية لا متتالية

\*نقول ان نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  تؤول إلى  $+\infty$  إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل  $[A; +\infty)$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة. نكتب  $\lim_{n \geq n_0} u_n = +\infty$

\*نقول ان نهاية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  تؤول إلى  $-\infty$  إذا و فقط إذا كان كل مجال على شكل  $(-\infty; A]$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء من رتبة. نكتب  $\lim_{n \geq n_0} u_n = -\infty$

**ملاحظة**  $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$

### 3- نهايات متتالية مرجعية خاصية

ليكن  $p$  عدد صحيح طبيعي  $1 \leq p \leq k$  عدد حقيقي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

### 4 خاصية

لتكن متتالية عدديّة  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $l$  عدداً حقيقياً

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

### 5- متتالية متقاربة - متتالية متباينة

#### تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها متميّزة.

نقول إن متتالية متباينة إذا و فقط كانت غير متقاربة.

#### أمثلة

$$w_n = (-1)^n \quad \text{و} \quad v_n = n^3 \quad \text{و} \quad u_n = \frac{-3}{n^2} + 4 \quad \text{نعتبر}$$

متقاربة لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

متباينة لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

متباينة لأن  $(w_n)$  لا تقبل نهاية

### II- مصادق التقارب

**مصادق 1** لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عدديّة و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عدديّة متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq v_n \quad l \text{ عدد حقيقي حيث}$$

إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  فان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  ممتاليتين عدديتين حيث

إذا كان  $\lim v_n = +\infty$  فان  $\lim u_n = +\infty$   
إذا كان  $\lim u_n = -\infty$  فان  $\lim v_n = -\infty$

## لازمة

لتكن  $(w_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ثلاث ممتاليات حيث

إذا كان  $\lim u_n = l$  فان  $\lim v_n = \lim w_n = l$

**أمثلة** نعتبر  $\lim u_n$  حدد الحالات التالية:

ج-  $u_n = \frac{\sin n}{n}$  ب-  $u_n = -n^2 + n$  أ-  $u_n = n^2 + n - 3$   
 $\lim u_n = +\infty$  و حيث  $\lim n^2 = +\infty$  ومنه  $n^2 \leq n^2 + n - 3$   $n \geq 3$  لدينا لكل

ب- لدينا لكل  $n \geq 2$   $n - n^2 \leq -\frac{n^2}{2}$  و منه  $1 - n \leq -\frac{n}{2}$   $1 - \frac{n}{2} \leq 0$   $\lim u_n = -\infty$  فان  $\lim -\frac{n^2}{2} = -\infty$  و حيث

ج- لدينا لكل  $n \geq 1$   $\lim \frac{1}{n} = 0$  و حيث  $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$   $\lim u_n = 0$  تمررين: نعتبر  $(u_n)_{n \geq 1}$  حيث  $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$  بين بالترجع أن  $u_n \geq \sqrt{n}$  واستنتج

## III- نهاية الممتالية الهندسية $q^n$

الحالة 1:  $q > 1$

يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً  $a$  حيث  $q = 1 + a$  ومنه  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  نعلم أن  $q^n \geq 1 + na$

وحيث  $\lim q^n = +\infty$  فان  $\lim 1 + na = +\infty$

الحالة 2:  $q = 1$  لدينا

الحالة 3:  $-1 < q < 1$

$\lim |q^n| = 0$  و بالتالي  $\lim \frac{1}{|q|^n} = \lim \left( \frac{1}{|q|} \right)^n = +\infty$  و منه  $\frac{1}{|q|} > 1$  ومنه  $|q| < 1$

إذن  $\lim q^n = 0$

الحالة 4:  $q \leq -1$  ليس لها نهاية  $(q^n)$

## خاصية

إذا كان  $q < -1$  فان  $\lim q^n = 0$   
إذا كان  $-1 \leq q \leq 1$  فان  $(q^n)$  ليس لها نهاية

إذا كان  $q > 1$  فان  $\lim q^n = +\infty$   
إذا كان  $q = 1$  فان  $\lim q^n = 1$

**ملاحظة** \*- الممتالية  $(q^n)$  متقارية اذا كان  $-1 < q \leq 1$

\*- ليكن  $r \in \mathbb{Q}$

إذا كان  $0 < r < 1$  فان  $\lim n^r = 0$

إذا كان  $0 < r < +\infty$  فان  $\lim n^r = +\infty$

أمثلة  $\lim \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$  و  $\lim \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n$  حدد

**تمرين** تعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ:

$$u_0 = \frac{3}{2} ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1 \quad (1)$$

**مبرهنة** أدرس رتبة  $(u_n)$  و استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1) \quad (3)$$

## IV- خاصيات

**خاصية** كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

**خاصية** إذا كان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متاليتين متقاربتين نهايتها  $l$  و  $l'$  بحيث  $u_n \leq v_n \leq l$  فان  $l \leq l'$  لكل  $n \geq N$

**مبرهنة** كل متتالية تزايدية و مكورة هي متتالية متقاربة  
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

**ملاحظة** كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة

كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

**تمرين:** تعتبر  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية معرفة بـ

1- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  تزايدية

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة.

## V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

### 1- مبرهنة

**مبرهنة**  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متاليتين متقاربتين و  $\alpha$  عدد حقيقي

$$\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$$

$$\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$$

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

$$\text{إذا كان } 0 < \lim v_n \neq 0 \quad \text{فإن } \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$$

### العمليات على النهايات

$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\lim(u_n \times v_n)$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim v_n$	$\lim u_n$
$(l' \neq 0) \quad \frac{l}{l'}$	$l \times l'$	$l + l'$	$l'$	$l$
0	مع وضع إشارة $\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$l \neq 0 \quad l$
0	مع وضع عكس إشارة $\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$l \neq 0 \quad l$
مع وضع إشارة $\infty$	0	$l$	$0^+$	$l \neq 0 \quad l$
مع وضع عكس إشارة $l$	0	$l$	$0^-$	$l \neq 0 \quad l$
شكل غير محدد	0	0	0	0
0	شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	0
0	شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
مع وضع إشارة $\infty$	مع وضع إشارة $l$	$+\infty$	$l \neq 0 \quad l$	$+\infty$
مع وضع عكس إشارة $\infty$	مع وضع عكس إشارة $l$	$-\infty$	$l \neq 0 \quad l$	$-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + n - 1}}{\sqrt[3]{n^2 - 2n - 4}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

## VI- ممتاليات من نوع $f(u_n)$

### 1- خاصية

إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ممتالية عددية متقاربة نهائتها  $l$  و  $f$  دالة متصلة في العدد الحقيقي  $l$  فان الممتالية

$$f(l) \text{ المعرفة بـ } n \geq n_0 \text{ متقاربة و نهائتها } (v_n)_{n \geq n_0}$$

## 2- ممتالية من نوع $u_{n+1} = f(u_n)$

### نشاط

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases} \text{ نعتبر } (u_n) \text{ ممتالية عددية حيث}$$

$$1- \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq \frac{7}{2}$$

$$2- \text{ لتكن } (v_n) \text{ ممتالية عددية حيث } v_n = 1 - \frac{4}{u_n + 1}$$

$$\text{أ- بين أن } (v_n) \text{ ممتالية هندسية}$$

$$\text{ب- بـ حدد } \lim u_n \text{ استنتج } \lim v_n$$

$$3- \text{ لتكن } f \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R}_+^* \text{ حيث } f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

$$\text{أ- تأكد أن } f \text{ متصلة على } \left[ 2; \frac{7}{2} \right]$$

$$\text{ب- بين أن } f\left(\left[ 2; \frac{7}{2} \right]\right) \subset \left[ 2; \frac{7}{2} \right]$$

$$\text{ت- حل المعادلة } f(x) = x$$

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

### خاصية

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ممتالية عددية معرفة بالعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  بحيث يوجد مجال  $I$  ضمن  $D_f$  و الحد الأول

للممتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ينتمي إلى  $I$  و  $f$  متصلة على  $I$  و  $f(I) \subset I$ .

إذا كانت  $(u_n)$  ممتالية متقاربة فان نهائتها  $l$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$

### تمرين

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \text{ نعتبر الممتالية العددية } (u_n) \text{ المعرفة بـ}$$

$$1- \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 2$$

$$2- \text{ بين أن } (u_n) \text{ متالية تزايدية و استنتاج أن } (u_n) \text{ ممتالية متقاربة.}$$

$$3- \text{ استنتاج } \lim u_n$$

### تمرين

$$\text{نعتبر } (u_n) \text{ متالية حيث } u_0 = \frac{1}{2} \text{ و } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$$

$$\text{بين أن } (u_n) \text{ ممتالية متقاربة و حدد نهائتها}$$