



نحدد الدوال الأصلية للدالة f

رقم	دالة f	دوال الأصلية F للدالة f مع $c \in \mathbb{R}$	حيث تعريفها
1	$f(x) = 8x^7 - 12x^4 - 14x^3 - 6x + 5$	$F(x) = x^8 - \frac{12}{5}x^4 - \frac{7}{2}x^3 - 3x + 5x + c$	$\mathbb{R}$
2	$f(x) = -4x^5 + \frac{2}{x^2} + 3$	$F(x) = -\frac{2}{3}x^6 - \frac{2}{x} + 3x + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
3	$f(x) = (x+8)^2 + 1$ $= (x+8)'(x+8)^2 + 1$	$F(x) = \frac{1}{3}(x+8)^3 + 3x + c$	$\mathbb{R}$
4	$f(x) = (11x+1)^5 - 2x$ $= \frac{1}{11}(11x+1)'(11x+1)^5 - 2x$	$F(x) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{6}(11x+1)^6 - x^2 + c$	$\mathbb{R}$
5	$f(x) = (2x^3 - 9)^2 + 7x^2$ $= 4x^6 - 36x^3 + 81$	$F(x) = \frac{4}{7}x^7 - 9x^4 + 81x + c$	$\mathbb{R}$
6	$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \frac{5}{2} \times \sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
7	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{(2x+4)'}{2 \times \sqrt{2x+4}}$	$F(x) = \sqrt{2x+4}$	$]-2; +\infty[$
8	$f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{x^8+1}}$ $= \frac{1}{8}(x^8+1)'(x^8+1)^{-\frac{1}{2}}$	$F(x) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x^8+1)^{-\frac{1}{2}+1} + c$ $= \frac{1}{4}\sqrt{x^8+1} + c$	$\mathbb{R}$
9	$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1} + c$ $= \frac{4}{5} \times \sqrt[5]{x^5} + c$	$\mathbb{R}^+$
10	$f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1} + c$ $= \frac{3}{8} \times \sqrt[3]{x^8} + c$	$\mathbb{R}^+$
11	$f(x) = \sqrt[3]{2x-8}$ $= \frac{1}{2}(2x-8)'(2x-8)^3$	$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(2x-8)^4 + c$ $= \frac{1}{8}(2x-8)^4 + c$	$]4; +\infty[$



	$F(x) = \frac{1}{5} \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (5x^8 - 7)^{\frac{1}{2} + 1} + c$ $= \frac{2}{15} (5x^8 - 7)^{\frac{3}{2}} + c$ $= \frac{2}{15} \sqrt{(5x^8 - 7)^3} + c$	$f(x) = x^7 \cdot \sqrt{5x^8 - 7}$ $= \frac{1}{5} (5x^8 - 7)' (5x^8 - 7)^{\frac{1}{2}}$	12
$\mathbb{R}$	$F(x) = -\frac{3}{4} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 \times \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) + c$	$f(x) = 3 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 5 \cos(2x - \pi)$	13
$\mathbb{R}$	$F(x) = -3 \times \frac{1}{5} \cos x^5 + c$	$f(x) = 3x^4 \sin x^5 = 3 \times \frac{1}{5} (x^5)' \sin x^5$	14
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$	15
$\mathbb{R}$	$f(x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x + c$	$f(x) = \sin x \cos^3 x = -(\cos x)' \cos^3 x$	16
أو $]3; +\infty[$ أو $]2; 3[$ أو $]-\infty; 2[$	$F(x) = \frac{1}{9} (x^2 - 5x + 6)^9 + c$	$f(x) = \frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^8}$ $= (x^2 - 5x + 6)' (x^2 - 5x + 6)^8$	17
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$f(x) = -4 \cos^{-4} x + c = \frac{-4}{\cos^4 x} + c$	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^5 x} = -(\cos x)' \cos^{-5} x$	18
أو $]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$F(x) = \frac{1}{6} x^6 - 3x + \frac{5}{x} + c$	$f(x) = \frac{x^7 - 3x^2 - 5}{x^2} = x^5 - 3 - \frac{5}{x^2}$	19

02

01. نحدد الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

لدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \\
 &= \sqrt{x-1} + 2 \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}} \\
 &= (x-1)' (x-1)^{\frac{1}{2}} + 2 \times \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}
 \end{aligned}$$

و منه :



$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (x-1)^{\frac{1}{2} + 1} + 2 \times \sqrt{x-1} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2 \times \sqrt{x-1} + c$$

خلاصة: الدوال الأصلية لدالة التالية: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ هي على شكل $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + 2 \times \sqrt{x-1} + c$.

03.

01. هل الدالتين $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$ أصليتين لنفس الدالة $f(x)$ ؟

نعتبر $G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ لدينا:

$$F(x) = G(x) \text{ ومنه } F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2 = \frac{1}{6}(9x^2 + 24x + 16) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3} = G(x) + \frac{4}{3}$$

ومنه: $F(x) = G(x) + \frac{4}{3}$ إذن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$.

خلاصة: الدالتين $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$ أصليتين لنفس الدالة $f(x)$.

04.

01. F دالة أصلية لـ f حدد $f(x)$.

أ- $F(x) = 3x^4 - 2x + 5$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (3x^4 - 2x + 5)' = f(x) \text{ ومنه : } f(x) = 12x^3 - 2$$

$$\Leftrightarrow 12x^3 - 2 = f(x)$$

خلاصة: $f(x) = 12x^3 - 2$

ب- $F(x) = -x + \frac{3}{x}$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(-x + \frac{3}{x}\right)' = f(x) \text{ ومنه : } f(x) = -1 - \frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow -1 - \frac{3}{x^2} = f(x)$$

خلاصة: $f(x) = -1 - \frac{3}{x^2}$

ج- $F(x) = 5\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(5\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)' = f(x) \text{ ومنه : } f(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2x^{3/2}}$$



$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}} = f(x)$$

خلاصة : $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

د : $F(x) = 2 \sin(3x) + 7 \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(2 \sin(3x) + 7 \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = f(x)$: دالة أصلية ل f و منه :

$$\Leftrightarrow 6 \cos(3x) - 35 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

خلاصة : $f(x) = 6 \cos(3x) - 35 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$

05.

01. لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ ب : $G(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{5}$. حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $]0, +\infty[$ و التي تنعدم في -1 .

الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - 7$ هي على شكل : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x + c$

$$F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}(-1)^3 - \frac{3}{-1} - 7(-1) + c = 0$$

من جهة أخرى :

$$\Leftrightarrow c = -\frac{119}{12}$$

و بالتالي : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$

خلاصة : حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $]0, +\infty[$ و التي تنعدم في -1 هي : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$

02. لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ب : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$. حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ و

$$F(0) = 1$$

الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$ هي على شكل : $F(x) = \tan x + \sin x + c$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \tan 0 + \sin 0 + c = 1$$

من جهة أخرى :

$$\Leftrightarrow c = 1$$

و بالتالي : $F(x) = \tan x + \sin x + 1$

خلاصة : حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $]0, +\infty[$ و التي تنعدم في -1 هي : $F(x) = \tan x + \sin x + 1$



06.

01. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ب: $f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3}$.

أ- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ حيث: $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}$

لدينا :

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3} \Leftrightarrow \frac{3x+4}{(x+1)^3} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3} = \frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$$

ومنه : $a=3$ و $a+b=4$ أي $a=3$ و $b=1$.

خلاصة : $a=3$ و $b=1$ و $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

طريقة 2 :

لدينا :

$$f(x) = \frac{3x+4}{(x+1)^3} = \frac{3x+3+1}{(x+1)^3} = \frac{3x+3}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{3(x+1)}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

خلاصة : $a=3$ و $b=1$ و $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$

أ- نستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$.

لدينا : $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} = 3(x+1)'(x+1)^{-2} + (x+1)'(x+1)^{-3}$

إذن : دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$ هي : $F(x) = -3(x+1)^{-1} - \frac{1}{2}(x+1)^{-2} = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$

خلاصة : دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$ هي : $F(x) = -\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$

07.

01. لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$ حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\mathbb{R}$ و

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

نحدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\mathbb{R}$ و $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

لدينا :



$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x \\ &= \cos x \sin^2 x - 3\cos x \sin x + 8\cos x \\ &= (\sin x)' \sin^2 x - 3(\sin x)' \sin x + 8\cos x \end{aligned}$$

ومنه : الدوال الأصلية لدالة f هي : $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2 x + 8\sin x + c$

من جهة أخرى : $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + c = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(-1)^3 - 3 \times \frac{1}{2}(-1)^2 + 8(-1) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{59}{6}$$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2 x + 8\sin x - \frac{59}{6}$

خلاصة : الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث : $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ هي : $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 3 \times \frac{1}{2}\sin^2 x + 8\sin x - \frac{59}{6}$