

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الاشتقاق
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 0$

(3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$ ولكن :

$$f'_d(0) \neq f'_g(0)$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = x \Leftrightarrow y = 0 + 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_d(0)(x - 0)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -x \Leftrightarrow y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_g(0)(x - 0)$$

(6) لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ النقطة $A(0; f(0))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين 4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = |x^2 - 1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$.

6. كيف نسمي النقطة $A(1, f(1))$ ؟

الجواب: $f(x) = |x^2 - 1|$ ندرس إشارة : $x^2 - 1$:

$$x = -1 \text{ و } x = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases} \text{ و } f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \quad (1)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$ و $2 = f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \quad (2)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $-2 = f'_g(1)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 1$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

$$\text{الجواب : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1^2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0 = 1$

$$x_0 = 1 \text{ وهو العدد المشتق عند } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1)$$

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الجواب (1): $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 \text{ وهو العدد المشتق عند } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$2 = f'(2)$ وهو العدد المشتق عند $x_0 = 2$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

تمرين 3: الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 + |x|$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$)

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$)

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

5. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

6. كيف نسمي النقطة $A(0, f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x; x \geq 0 \\ f(x) = x^3 - x; x \leq 0 \end{cases}$ و $f(0) = 0^3 + |0| = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \quad (1)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $1 = f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1 \quad (2)$$

(3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

ولكن : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = 0 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_d(1)(x - 1)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -2x + 4 \Leftrightarrow y = 0 - 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_g(1)(x - 1)$$

(6) لدينا $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1; f(1))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = -1$

3. وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب :

$$D_f = [-1, +\infty[\quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2\sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2\sqrt{1+x}}{x + 1} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = -1$

(3) مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأرتايب

في النقطة : $A(-1; f(-1))$ وموجه نحو الأعلى

تمرين 6: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = |x|\sqrt{1-x}$

1. حدد D_f

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند

$x_0 = 0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها

3. هل الدالة f متصلة عند $x_0 = 0$ ؟

4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$ وأعط

تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب : (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x \geq 0\}$

$$1 \geq x \Leftrightarrow 1 - x \geq 0$$

$$D_f =]-\infty, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{1-x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = 1 = f'_d(0) \quad (2)$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{1-x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{1-x} = -1 = f'_g(0)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$

لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

النقطة : $O(0; f(0))$ أي $O(0; 0)$ هي نقطة مزواة

(2) دراسة اتصال الدالة f عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|\sqrt{1-x} = 0 = f(0)$$

اذن الدالة f متصلة عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{x - 1} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1)}{(x-1)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$

(4) مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور

الأرتايب

على اليسار في النقطة : $A(1; f(1))$ أي $A(1; 0)$ وموجه نحو الأعلى

لأن : $- \infty = \oplus$

تمرين 7: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^{10} \quad (3) \quad f(x) = 3x - 5 \quad (2) \quad f(x) = 2 \quad (1)$$

$$f(x) = 6\sqrt{x} - 4 \quad (6) \quad f(x) = \frac{5}{x} \quad (5) \quad f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos(7x + 2) \quad (8) \quad f(x) = 6x^4 - \cos x + 3\sin x \quad (7)$$

$$f(x) = 3\tan x - 1 \quad (10) \quad f(x) = \frac{4}{5}\sin(5x + 4) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad (12) \quad f(x) = x \cos x \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (15) \quad f(x) = (3x + 4)^3 \quad (14) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (13)$$

$$f'(x) = (3x - 5)' = 3 \quad (2) \quad f'(x) = (2)' = 0 \quad (1) \quad \text{أجوبة :}$$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 4 \times 3x^{3-1} - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = 12x^2 - x \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \times \frac{1}{x}\right)' = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2} \quad (5)$$

$$f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x} \quad (6)$$

$$f'(x) = (6x^4 - \cos x + 3\sin x)' = 6 \times 4x^3 + \sin x + 3\cos x \quad (7)$$

$$f'(x) = 24x^3 + \sin x + 3\cos x$$

$$f'(x) = \cos(7x + 2)' = -7 \times \sin(7x + 2) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}\sin(5x + 4)' = \frac{4}{5} \times \cos(5x + 4) = 4 \times \cos(5x + 4) \quad (9)$$

$$f'(x) = (3\tan x - 1)' = 3 \times (1 + \tan^2 x) - 0 = 3 \times (1 + \tan^2 x) \quad (10)$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v' : \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad (11)$$

$$f'(x) = (x \times \cos x)' = x' \times \cos x + x \times \cos' x =$$

$$f'(x) = 1 \times \cos x - x \times \sin x = \cos x - x \sin x$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} : \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad (12)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3+1} \right)' = \frac{(7x)'(x^3+1) - 7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{7(x^3+1) - 7x \times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (13)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (14)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-1} \right)' = \frac{(4x-3)'(2x-1) - (4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = (2x-1)^7 \quad (15)$$

$$f'(x) = \left((2x-1)^7 \right)' = 7 \times (2x-1)^{7-1} \times (2x-1)' = 14(2x-1)^6$$

تمرين 9: نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$h(x) = \sin(x^2 + 1)$$

أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

الجواب: نلاحظ أن h هي مركب دالتين :

$$h = g \circ f \quad \text{و} \quad g(x) = \sin x \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 1$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) : \text{ لأن}$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \cos(x^2+1) \times 2x = 2x \cos(x^2+1)$$

تمرين 10: نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$h(x) = \cos(2x^2 + 4x - 1)$$

أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

الجواب: نلاحظ أن h هي مركب دالتين :

$$h = g \circ f \quad \text{و} \quad g(x) = \cos x \quad \text{و} \quad f(x) = 2x^2 + 4x - 1$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) : \text{ لأن}$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \cos(2x^2 + 4x - 1) \times (4x + 4)$$

$$h'(x) = (4x + 4) \cos(2x^2 + 4x - 1)$$

تمرين 11: لتكن f الدالة العددية المعرفة

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \text{بما يلي}$$

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيراتها

2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I = [1; +\infty[$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

$$3. \text{ أحسب } (g^{-1})'(0)$$

أجوبة (1): الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

اذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\text{و} \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

إشارة f' هي إشارة $(x-1)(x+1)$

$$x=1 \text{ أو } x=-1 \text{ يعني } x-1=0 \text{ أو } x+1=0 \text{ يعني } (x-1)(x+1)=0$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (13)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = (3x+4)^3 \quad (14)$$

$$f'(x) = \left((3x+4)^3 \right)' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^{3-1} = 9(3x+4)^2$$

تمرين 8: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x+15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos 2x + 3 \sin 3x \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x+7} \quad (10) \quad f(x) = (3x^2+2)(7x+1) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (13) \quad f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (12) \quad f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad (11)$$

$$f(x) = (2x-1)^7 \quad (15) \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (14)$$

$$f'(x) = (7x+15)' = 7 \quad (2) \quad f'(x) = (11)' = 0 \quad (1) \quad \text{أجوبة :}$$

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \right)' = \frac{1}{5} \times 5x^{5-1} - \frac{1}{4} \times 4x^{4-1} - 4 + 0 = x^4 - x^3 - 4 \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x} \right)' = \left(3 \times \frac{1}{x} \right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad (7)$$

$$f'(x) = (\cos 2x + 3 \sin 3x)' = -\sin 2x + 3 \times \cos 3x = -2 \sin 2x + 9 \cos 3x \quad (8)$$

$$f(x) = (3x^2+2)(7x+1) \quad (9)$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :}$$

$$f'(x) = \left((3x^2+2) \times (7x+1) \right)' = (3x^2+2)' \times (7x+1) + (3x^2+2) \times (7x+1)'$$

$$f'(x) = 6x \times (7x+1) + 7 \times (3x^2+2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad (10)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x+7} \right)' = -\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2} = -\frac{5}{(5x+7)^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad (11)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+8x} \right)' = \frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :} \quad f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (12)$$

(3) أدرس تغيرات (4) حدد جدول تغيرات (5) بين أن: $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq -3$$

الجواب: (1) الدالة f محدودة اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x + 2 = 0 \text{ يعني } x = -1$$

درس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

- اذا كانت: $x \in [-1; +\infty[$ فان : $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايديه
- اذا كانت: $x \in]-\infty; -1]$ فان : $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصيه

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

(5) -3 هي قيمة دنيا للدالة f يعني $f(x) \geq -3 \forall x \in \mathbb{R}$

تمرين 15: نعتبر الدالتين g و g المعرفتين كالتالي :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases} \text{ و } g(x) = |x|(x-1)$$

(1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

(2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق ؟

(3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0 = 0$

الجواب : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases}$ و $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{4}{x} + 5 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{4}{x} + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4 + 2x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4 + 2x}{x} \times \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4 + 2x}{x} \times \frac{1}{x-1} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 3 = 4$$

نتخلص من ال ش غ م مثلاً بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذر للحدودية $x^2 + 2x - 3$

اذن : هي تقبل القسمة على : $x - 1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 = 4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $4 = f'_g(1)$

(2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

(2) حسب جدول تغيرات الدالة g فان g تزايدية قطعاً ومتصلة على $I = [1; +\infty[$ (لأنها دالة محدودة)

ومنه g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال :

$$J = g(I) = g([1; +\infty[) = [-2; +\infty[$$

$$\begin{cases} g(x) = y \\ x \in [1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(y) \\ y \in [-2; +\infty[\end{cases} \quad (3)$$

$$\text{حسب الخاصية لدينا : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$\text{نضع : } g^{-1}(0) = x \text{ يعني } g(x) = 0 \text{ يعني } x^3 - 3x = 0$$

$$\text{يعني } x(x^2 - 3) = 0 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 - 3 = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 3 \text{ يعني } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3}$$

$$\text{ونعلم أن : } x \in [1; +\infty[\text{ اذن نأخذ فقط : } x = \sqrt{3}$$

$$\text{اذن نجد : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\sqrt{3})}$$

$$\text{ونعلم أيضاً أن : } g'(x) = 3x^2 - 3 \text{ اذن } g'(\sqrt{3}) = 3 \times \sqrt{3}^2 - 3 = 6$$

$$\text{ومنه : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{6}$$

تمرين 12: أحسب مشتقة الدوال المعرفة كالتالي :

$$(1) f(x) = x^{\frac{5}{7}} \quad (\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = x^{\frac{2}{5}} \quad (\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = x^{\frac{2}{5}} \quad (\forall x \in]0; +\infty[)$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (\forall x \in]0; +\infty[)$$

أجوبة (1): $(\forall x \in]0; +\infty[); \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5} \frac{1}{(\sqrt[5]{x})^3}$

$$(2) (\forall x \in]0; +\infty[); \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5} x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5} \frac{1}{(\sqrt[5]{x})^3}$$

$$(3) (\forall x \in]0; +\infty[); \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

تمرين 13: أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

الجواب : نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$

$$\left(\sqrt[3]{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2 + 1)'}{3(\sqrt[3]{x^2 + 1})^{3-1}} = \frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2}$$

تمرين 14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

$$x=1 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow f''(x)=0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$6x-6$	$-$	0	$+$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب الموجبة على المجال: $[1; +\infty[$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب الموجبة على المجال: $]-\infty; 1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

المشتقة الثانية تنعدم وتتغير إشارتها عند: $x_0=1$ ولدينا $f(1)=-1$

ومنه: $A(1; -1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

6) نبين أن $A(1; -1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

(أ) إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $2-x \in \mathbb{R}$ عبارة صحيحة

(ب) نبين أن: $f(2-x) + f(x) = -2 = 2b$ ؟؟؟؟

$$f(2-x) + f(x) = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 1 + x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f(2-x) + f(x) =$$

$$= 2^3 - 3 \times 2^2 x + 3 \times 2x^2 - x^3 - 3(2^2 - 4x + x^2) + 1 + x^3 - 3x^2 + 1$$

$$= 8 - 12x + 6x^2 - x^3 - 12 + 12x - 3x^2 + 1 + x^3 - 3x^2 + 1 = -2 = 2b$$

ومنه $A(1; -1)$ مركز تماثل لمنحنى الدالة f .

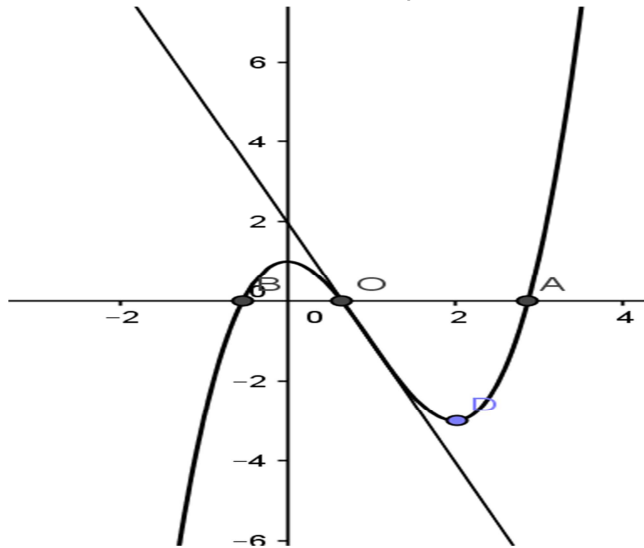
مركز تماثل للمنحنى (C_f)

7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=1$

$$f'(1) = -3 \text{ و } f(1) = -1 \text{ و } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = -3x + 2 \Leftrightarrow y = -1 - 3(x-1) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x-1)$$

8) التمثيل المبياني للدالة f



$$\begin{cases} g(x) = x(x-1); x \geq 0 \\ g(x) = -x(x-1); x \leq 0 \end{cases} \quad g(0)=0 \text{ و } g(x) = |x|(x-1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $-1 = f'_d(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + 1 = 1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1 = g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=0$ ولكن:

$$g'_d(0) \neq g'_g(0)$$

ومنه: g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

تمرين 16: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محددات مجموعة التعريف

2. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

4. ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f وحدد نقط الانعطاف

6. بين أن $A(1; -1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

7. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; -1)$

8. أنشئ (C_f) و (T) .

الأجوبة: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (2)$$

(C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعاً شلجياً اتجاهه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \quad (3)$$

$$x-2=0 \text{ و } 3x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$$

$$x=2 \text{ و } x=0 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

(4)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

(5)

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3x^2 - 6x$$

جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول

الدوال الدوال

الدالة	f' الدالة المشتقة
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

الدالة	f' الدالة المشتقة
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u - v$	$f'(x) = u' - v'$
$f(x) = k.u$	$f'(x) = k.u'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u' \times v + u \times v'$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu^{n-1} \times u'$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

تمارين للبحث :

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = -1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

تمرين 2: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{2x^2 - 16x} \quad (2) \quad f(x) = 4x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$$

$$(3) \quad f(x) = 4x^3 - 4 \cos x + 6 \sin x$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{\cos 2x} \quad (5) \quad f(x) = \cos(x^2 - 4)$$

$$(6) \quad f(x) = \tan(x^3 + 1) \quad (7) \quad f(x) = \sqrt[5]{x} - 2\sqrt[3]{x^2}$$

$$(8) \quad f(x) = \sqrt[3]{7x^2 + x} \quad (9) \quad f(x) = \sqrt[5]{\sin x}$$

تمرين 3: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I = [0; +\infty[$ تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده

2. أحسب $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

تمرين 4: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $I = [0; 1[$ و أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$

2. بين أن قصور الدالة f على المجال $I = [0; 1[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد $f^{-1}(x)$

4. أحسب $(f^{-1})'\left(-\frac{5}{3}\right)$

تمرين 5: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [0; +\infty[$

بما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

أحسب $f(\sqrt{3})$ و $(f^{-1})'(2)$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

