Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

2 ع ت — الإشتقاق

1.قابلية اشتقاق دالة في عدد

لتكن **f** دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه عدد **a** .

نقول إن **f** قابلة للاشتقاق في **a** إذا كان: $l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in R$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة **f** في **a** , ويكتب $f'(a)$.

وفي هذه الحالة لدينا : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-a}=f'(a)$.

2- قابلية اشتقاق دالة على اليمين و على اليسار في عدد :

لتكن **f** دالة عددية معرفة على مجال من النوع $[a,a+\varepsilon[$ حيث $\varepsilon\succ 0$.

f قابلة للاشتقاق على اليمين في **a** إذا كان: $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in R$.

هذه النهاية , عندما تكون منتهية , تسمى العدد المشتق للدالة **f** على اليمين في **a** ونرمز له بالرمز : $f'_d(a)$.

بطريقة مماثلة نعرف قابلية اشتقاق دالة على اليسار في عدد .

نرمز للعدد المشتق للدالة **f** في العدد **a** بالرمز: $f'_g(a)$.

خاصية :

تكون دالة **f** قابلة للاشتقاق في عدد **a** إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين في **a** و قابلة للاشتقاق على اليسار في **a** و $f'_d(a)=f'_g(a)$

بتعبير اخر : (**f** قابلة للاشتقاق في **a**) $\Leftrightarrow$ ($f'_d(a)=f'_g(a)$).

خاصية : الاشتقاق والاتصال

كل دالة قابلة للاشتقاق في عدد **a** تكون متصلة في العدد **a** .

انتبه ! العكس غير صحيح . (اعتبر الدالة $x\to|x|$)

قابلية اشتقاق دالة على مجال

تكون دالة **f** ق ش على مجال $[a,b[$ إذا كانت ق ش في جميع نقطه .

تكون **f** ق ش على $[a,b[$ إذا كانت ق ش على $]a.b[$ وعلى اليمين في a.

تكون **f** ق ش $]a,b]$ إذا كانت ق ش على $]a,b[$ وعلى اليسار في **b** .

ملاحظة : نعرف بالمثل قابلية اشتقاق دالة على باقي أنواع المجالات .

مماس منحنى دالة – نصف مماس منحنى دالة

إذا كانت دالة **f** قابلة للاشتقاق في **a** عدد فإن منحناها يقبل مماسا في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

ملاحظة : العدد $f'(a)$ هو المعامل الموجه للمماس في **a** .

إذا كانت **f** ق ش على اليمين في **a** فإن منحناها يقبل نصف مماس على اليمين في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته : $\begin{cases}y=f'_d(a).(x-a)+f(a)\\ x\geq a\end{cases}$

إذا كانت **f** ق ش على اليسار في **a** فإن منحناها يقبل نصف مماس على اليمين في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته : $\begin{cases}y=f'_g(a).(x-a)+f(a)\\ x\leq a\end{cases}$

إذا كان: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ فإن الدالة **f** غير قابلة للاشتقاق في **a** ومنحناها يقبل نصف مماس موازٍ لمحور الأراتيب .

إذا كان $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ فإن الدالة **f** غير قابلة للاشتقاق في **a** ومنحناها يقبل نصفي مماس ليس لهما نفس الحامل .

في هذه الحالة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة

تأويلات هندسية

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$+\infty$	$l\in R^*$	0
f غير ق ش على اليمين في **a** ومنحنى **f** يقبل نصف مماس عمودي على اليمين النقطة في $M(a;f(a))$	**f** ق ش على اليمين في **a** ومنحنى **f** يقبل نصف مماس مائل على اليمين $M(a;f(a))$	**f** ق ش على اليمين في **a** ومنحنى **f** يقبل نصف مماس أفقي على اليمين $M(a;f(a))$

3.مشتقة المركبة ..مشتقة الدالة العكسية :

خاصية : مشتقة المركبة في نقطة

لتكن **f** دالة معرفة على مجال **I** و **g** دالة معرفة على مجال **J** بحيث $f(I)\subset J$.ليكن **a** عنصرا من **I** .

إذا كانت الدالة **f** ق ش في **a** و الدالة **g** ق ش في $f(a)$

فإن : $g\circ f$ ق ش في **a** و لدينا :

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$$

خاصية : مشتقة المركبة على مجال

لتكن **f** دالة معرفة على مجال **I** و **g** دالة معرفة على مجال **J** بحيث $f(I)\subset J$.

إذا كانت الدالة **f** ق ش على **I** و الدالة **g** ق ش على **J**

فإن $g\circ f$ ق ش على **I** ولكل **x** من **I** : $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

خاصية :

لتكن **f** دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال **I**.

إذا كانت **f** قابلة للإشتقاق في عدد **a** و $f'(a)\neq 0$ فإن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق في $b=f(a)$ ولدينا $f^{-1}(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2ع ت — الإشتقاق

خاصية:مشتقة دالة الجذر

ليكن **n** من $N^*-\{1\}$.دالة الجذر من الرتبة **n** ق ش على R_+^* ولدينا : $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ لكل **x** من R_+^*

خاصية

ليكن **n** من $N^*-\{1\}$ ،

إذا كانت **u** دالة قابلة للإشتقاق وموجبة قطعا على مجال **I**

فإن الدالة $\sqrt[n]{u}$ قابلة للإشتقاق على **I** ولدينا :

$\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$ لكل **x** من **I** .

4.تطبيقات :

لتكن **f** دالة قابلة للإشتقاق على مجال **I** .

. **f** تزايدية على **I** يكافئ $f'(x)\geq 0$ لكل **x** من **I** .

. **f** تناقصية على **I** يكافئ $f'(x)\leq 0$ لكل **x** من **I** .

لتكن **f** دالة ق ش على مجال مفتوح **I** و x_0 عنصر من **I**

تقبل **f** مطرافا في x_0 إذا وفقط إذا كانت **f'** تنعدم في x_0 وتغير إشارتها في x_0

لتكن **f** دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال **I** .

. تقعر **C** موجه نحو الأعلى يكافئ $f''(x)\geq 0$ لكل **x** من **I**

هندسيا :**C** يوجد فوق جميع مماساته

. تقعر **C** موجه نحو الأسفل يكافئ $f''(x)\leq 0$ لكل **x** من **I**

هندسيا :**C** يوجد تحت جميع مماساته

.إذا كانت " **f** تنعدم في x_0 من **I** وتغيرإشارتها بجوار x_0

فإن $I\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى **C**.

هندسيا : تقير **C** يتغير في النقطة $I\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$.

5.عناصر تماثل منحنى دالة :

لتكن **f** دالة معرفة على مجموعة **D** و **a** و **b** عددين حقيقيين

. يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل منحنى **f** إذاوفقط

إذا كان لكل **x** من **D** لدينا $\begin{cases}2a-x\in D\\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

. تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل منحنى **f** إذا وفقط إذا كان

لكل **x** من **D** لدينا : $\begin{cases}2a-x\in D\\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

ملاحظات :

.محورتماثل منحنى دالة دائما يكون مواز لمحور الأراتيب.

.مركزتماثل منحنى دالة لا ينتمي بالضرورة إليه.

ليكن **T** عددا حقيقيا موجبا قطعا .و**f** دالة معرفة على مجموعة **D** .

نقول إن **f** دورية و**T** دور لها إذا كان: $(\forall x\in D):\begin{cases}x\pm T\in D\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

6.مشتقات الدوال الإعتيادية والعمليات :

الدالة **f**	الدالة المشتقة	حيز تعريف الدالة المشتقة
c	**o**	**R**
ax	**a**	**R**
x^n $n\in N^*-\{1\}$	$n\,x^{n-1}$	**R**
x^r $n\in Z^--\{-1\}$	$r\,x^{r-1}$	R_-^* أو R_+^*
$\sqrt[n]{x}$ $n\in N^*-\{1\}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	R_+^*
x^r $r\in Q^*$	$r\,x^{r-1}$	R_+^*
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	R_-^* أو R_+^*
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R_+^*
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	**R**
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	**R**
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	على كل مجال ضمن $R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,\pi\in Z\right\}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	R_-^* أو R_+^*
e^x	e^x	**R**
$\alpha\,u$	$\alpha\,u'$	حيث تكون **u** ق ش
$u+v$	$u'+v'$	حيث تكون **u** و **v** ق ش
$u.v$	$u'v+uv'$	حيث تكون **u** و **v** ق ش
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	حيث تكون **u** و **v** ق ش و v لاتنعدم
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	حيث تكون **u** ق ش و لاتنعدم
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	حيث تكون **u** ق ش و موجبة قطعا
$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	حيث تكون **u** ق ش و موجبة قطعا
u^n $n\in N^*-\{1\}$	$nu^{n-1}.u'$	حيث تكون **u** ق ش
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$	حيث تكون **u** ق ش و لاتنعدم
e^u	$u'e^u$	**R**

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma