

الأستاذ : عثمانى نجيب مذكرة رقم 2/	مادة الرياضيات	أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة
---------------------------------------	----------------	--------------------------------------

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 2 في درس الاشتقاق

محتوى البرنامج

- العدد المشتق-الدالة المشتقة تذكير و إضافات
- مشتقة بعض الدوال الاعتيادية
- العمليات على الدوال المشتقة:تذكير
- مشتقة مركب دالتين والدالة العكسية

القدرات المنتظرة

- حساب مشتقات الدوال الاعتيادية
- تحديد رتبة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها .
- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها المبياني
- الحل المبياني لمعادلة من الشكل : $f(x) = g(x)$ و متراجحات من الشكل : $f(x) \leq g(x)$
- تحديد مشتقة و رتبة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال و تمثيلها المبياني
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية
- دراسة و تمثيل دوال لا جذرية و دوال مثلثية .

I. تذكير و إضافات:

1. العدد المشتق

تعريف : لنكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a

عنصراً من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \quad \text{بحيث :}$$

l يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{ونكتب :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{ملاحظة : الكتابة :}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{تكافئ الكتابة :}$$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10 \end{aligned}$$

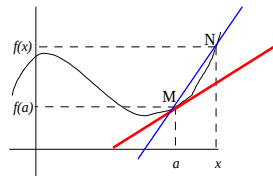
ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0 = 1$

$$x_0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1)$$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق – معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

تعريف : لنكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في

معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a; f(a))$

و الذي معاملته الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى

(C_f) في النقطة M

خاصية: لنكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a; f(a))$ هي :

$$(\Delta) : y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

$$f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1 \quad \text{الجواب : (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$$x_0 = 2 \quad 2 = f'(2) \quad \text{وهو العدد المشتق عند } x_0 = 2$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

الأستاذ : عثمانى نجيب

الجواب : $f(x) = |x^2 - 1|$ ندرس إشارة : $x^2 - 1$:

$$x = -1 \text{ أو } x = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

ومنه : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases}$ و $f(1) = |1^2 - 1| = 0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$ و $2 = f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $-2 = f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 1$

(3) f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

ولكن : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = 0 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_d(1)(x - 1)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -2x + 4 \Leftrightarrow y = 0 - 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_g(1)(x - 1)$$

(6) لدينا $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1; f(1))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين 4:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = -1$

3. وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

الجواب :

$$(1) D_f = [-1; +\infty[$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = -1$

(3) مبيانيا نقول ان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأرتيب

في النقطة : $A(-1; f(-1))$ وموجه نحو الأعلى

خاصية: إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0 فإنها

متصلة في x_0 .

تمرين 5:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = |x| \sqrt{1-x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند

$x_0 = 0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

تمرين 2: الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 + |x|$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $(x_0 = 0)$

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $(x_0 = 0)$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

5. حدد معادلة لنصف مماس لمنحنى للدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

6. كيف نسمي النقطة $A(0, f(0))$ ؟

الجواب : $\begin{cases} f(x) = x^3 + x; x \geq 0 \\ f(x) = x^3 - x; x \leq 0 \end{cases}$ و $f(0) = 0^3 + |0| = 0$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $1 = f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 0$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 1 = -1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 0$

(3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$ ولكن :

$$f'_d(0) \neq f'_g(0)$$

ومنه : f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = x \Leftrightarrow y = 0 + 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_d(0)(x - 0)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -x \Leftrightarrow y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_g(0)(x - 0)$$

(6) لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ النقطة : $A(0; f(0))$ تسمى نقطة مزواة

خاصية: لنكن f دالة عددية معرفة

على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة

للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في

النقطة a و $f'_g(a) = f'_d(a)$

تمرين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = |x^2 - 1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$.

6. كيف نسمي النقطة $A(1, f(1))$ ؟

$$f(x) = \cos 2x + 3\sin 3x \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

2. هل الدالة f متصلة عند $x_0 = 0$ ؟

3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$ واعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

II. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات (انظر الجدول 1 و 2)

أمثلة. حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^{10} \quad (3) \quad f(x) = 3x - 5 \quad (2) \quad f(x) = 2 \quad (1)$$

$$f(x) = 6\sqrt{x} - 4 \quad (6) \quad f(x) = \frac{5}{x} \quad (5) \quad f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos(7x + 2) \quad (8) \quad f(x) = 6x^4 - \cos x + 3\sin x \quad (7)$$

$$f(x) = 3\tan x - 1 \quad (10) \quad f(x) = \frac{4}{5}\sin(5x + 4) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad (12) \quad f(x) = x \cos x \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (15) \quad f(x) = (3x+4)^3 \quad (14) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (13)$$

أجوبة: $f'(x) = (3x-5)' = 3 \quad (2) \quad f'(x) = (2)' = 0 \quad (1)$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 4 \times 3x^{3-1} - \frac{1}{2} \times 2x^{-2} - 0 = 12x^2 - \frac{1}{x} \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5 \times \frac{1}{x}\right)' = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^2} \quad (5)$$

$$f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x} \quad (6)$$

$$f'(x) = (6x^4 - \cos x + 3\sin x)' = 6 \times 4x^3 + \sin x + 3\cos x = 24x^3 + \sin x + 3\cos x \quad (7)$$

$$f'(x) = \cos(7x + 2)' = -7 \times \sin(7x + 2) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}\sin(5x + 4)' = \frac{4}{5} \times \cos(5x + 4) = 4 \times \cos(5x + 4) \quad (9)$$

$$f'(x) = (3\tan x - 1)' = 3 \times (1 + \tan^2 x) - 0 = 3 \times (1 + \tan^2 x) \quad (10)$$

(11) نستعمل القاعدة التالية : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = (x \times \cos x)' = x' \times \cos x + x \times \cos' x = 1 \times \cos x - x \times \sin x = \cos x - x \sin x$$

(12) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x+1}\right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(13) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$: نستعمل القاعدة التالية : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

(14) $(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$: نستعمل القاعدة التالية : $f(x) = (3x+4)^3$

$$f'(x) = ((3x+4)^3)' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^{3-1} = 9(3x+4)^2$$

تمرين 6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x + 15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$\lim f(x) = \lim x^3 - 3x = \lim x^3 = -\infty$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

2) حسب جدول تغيرات الدالة g فإن g تزايدية قطعاً ومتصلة على $I = [1; +\infty[$ (لأنها دالة حدودية)

ومنه g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال :

$$J = g(I) = g([1; +\infty[) = [-2; +\infty[$$

$$\begin{cases} g(x) = y \\ x \in [1; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(y) \\ y \in [-2; +\infty[\end{cases} \quad (3)$$

$$\text{حسب الخاصية لدينا : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))}$$

$$\text{نضع : } g^{-1}(0) = x \text{ يعني } g(x) = 0 \text{ يعني } x^3 - 3x = 0$$

$$\text{يعني } x(x^2 - 3) = 0 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 - 3 = 0$$

$$\text{يعني } x = 0 \text{ أو } x^2 = 3 \text{ يعني } x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3}$$

$$\text{ونعلم أن : } x \in [1; +\infty[\text{ إذن نأخذ فقط : } x = \sqrt{3}$$

$$\text{إذن نجد : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\sqrt{3})}$$

$$\text{ونعلم أيضاً أن : } g'(x) = 3x^2 - 3 \text{ إذن } g'(\sqrt{3}) = 3 \times \sqrt{3}^2 - 3 = 6$$

$$\text{ومنه : } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{6}$$

نتيجة 1: الدالة $x \mapsto x^r$ حيث $r \in \mathbb{Q}$ قابلة للاشتقاق على المجال

$$[0; +\infty[\text{ ولدينا : } (x^r)' = rx^{r-1} \quad (\forall x \in]0; +\infty[)$$

$$\text{مثال : } (\forall x \in]0; +\infty[); \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \frac{1}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{2}{5} \frac{1}{(\sqrt[5]{x})^3}$$

تمرين 8: أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = x^{\frac{5}{7}}$$

نتيجة 2:

ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$. الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على المجال

$$[0; +\infty[\text{ ولدينا : } u'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \quad (\forall x \in]0; +\infty[)$$

$$\text{مثال : } (\forall x \in]0; +\infty[); \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

تمرين 9: أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = \sqrt[5]{x}$$

خاصية 3: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على مجال I ضمن $\mathbb{R}$

فان: الدالة $g: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I .

$$\text{ولدينا : } (\forall x \in I); g'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$$

$$\text{مثال : أحسب مشتقة الدالة المعرفة كالتالي : } (\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1)-2(4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \text{ : نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = (2x-1)^7 \quad (15)$$

$$f'(x) = ((2x-1)^7)' = 7 \times (2x-1)^{7-1} \times (2x-1)' = 14(2x-1)^6$$

III. مشتقة مركب الدالتين و مشتقة الدالة العكسية:

خاصية 1: لتكن f و g دالتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث: $f(I) \subset J$ و x_0 عنصر من I .

■ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0

$$\text{ولدينا : } (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

■ إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I و g قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ فان الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على المجال I و

$$\text{لدينا : } (\forall x \in I); (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$

مثال: $h(x) = \sin(x^2 + 1)$ أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

الجواب: نلاحظ أن h هي مركب الدالتين :

$$h = g \circ f \text{ و } g(x) = \sin x \text{ و } f(x) = x^2 + 1$$

$$\text{لأن : } h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \cos(x^2 + 1) \times 2x = 2x \cos(x^2 + 1)$$

تمرين 7: $h(x) = \sin(x^2 + 1)$ أدرس اشتقاق الدالة h وحدد الدالة المشتقة

خاصية 2: ليكن I مجالا ضمن $\mathbb{R}$ و f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال I و x_0 عنصراً من I .

■ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ ولدينا :

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

■ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال I بحيث دالتها المشتقة لا تتعدم على I (أي $(\forall x \in I); f'(x) \neq 0$)

فان الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$

$$\text{ولدينا : } (\forall y \in f(I)); (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

مثال: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3 - 3x$

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيراتها

2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I = [1; +\infty[$ تقبل

دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

$$3. \text{ أحسب } (g^{-1})'(0)$$

أجوبة : (1) الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\text{و } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

إشارة f' هي إشارة $(x-1)(x+1)$

$$0 = (x-1)(x+1) \text{ يعني } x+1=0 \text{ أو } x-1=0 \text{ يعني } x=-1 \text{ أو } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 = 4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $4 = f'_g(1)$

(2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

$$\begin{cases} g(x) = x(x-1); x \geq 0 \\ g(x) = -x(x-1); x \leq 0 \end{cases} \quad g(0) = 0 \quad \text{و} \quad g(x) = |x|(x-1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_d(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + 1 = 1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$ ولكن :

$$g'_d(0) \neq g'_g(0)$$

ومنه g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

تمرين 11: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(0, i, j)$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محددات مجموعة التعريف

2. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

4. ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f وحدد نقط الانعطاف

6. بين أن $A(1; -1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

7. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1; -1)$

8. أنشئ (C_f) و (T) .

II. تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتبة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

f تزايدية على مجال I يعني $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$

f تناقصية على مجال I يعني $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$

f ثابتة على مجال I يعني $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أدرس تغيرات (4) حدد جدول تغيرات f (5) بين أن: $f(x) \geq -3$ $\forall x \in \mathbb{R}$

الجواب: (1) الدالة f محدودة اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2 \quad (3)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{يعني} \quad 2x + 2 = 0 \quad \text{يعني} \quad x = -1$$

درس إشارة: $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	$\emptyset$	$+$

إذا كانت: $x \in [-1; +\infty[$ فإن: $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

إذا كانت: $x \in]-\infty; -1]$ فإن: $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

تمرين 10: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$g(x) = |x|(x-1) \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases}$$

(1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

(2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق؟

(3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0 = 0$

$$\text{الجواب:} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x} + 5 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x} + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x} \times \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x} \times \frac{1}{x - 1} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلاً بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن: 1 جذر للحدودية $x^2 + 2x - 3$

اذن: هي تقبل القسمة على: $x - 1$

الدالة المشتقة f'	لدالة
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a \sin(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b)$
$f'(x) = a \cos(ax+b)$	$f(x) = \sin(ax+b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

الدالة المشتقة f'	الدالة
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k.u'$	$f(x) = k.u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = nu^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$
$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \sqrt{u}$

2. أحسب

ب $f(\sqrt{3})$

و $(f^{-1})'(2)$

جدول
للدوال
المشتقة
لدوال
اعتيادية
و
العمليات
حول
الدوال

تمارين للبحث :

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = |x|\sqrt{1-x}$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$ وأعط تأويلا هندسيا للناتج المحصل عليها

2. هل الدالة f متصلة عند $x_0 = 0$ ؟

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = -1$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها

تمرين 3: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

$$(1) f(x) = 2 \quad (2) f(x) = 3x - 5 \quad (3) f(x) = x^{10}$$

$$(4) f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (5) f(x) = \sqrt{5x^2 - 10x}$$

$$(6) f(x) = \frac{4x-2}{2x-1} \quad (7) f(x) = 6x^4 - \cos x + 3\sin x$$

$$(8) f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (9) f(x) = \cos(7x^2 + 2)$$

$$(10) f(x) = \sin(4x^3 - 3) \quad (11) f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x^2}$$

$$(12) f(x) = \sqrt[5]{5x^2 - 10x} \quad (13) f(x) = \sqrt[4]{\sin x}$$

تمرين 4: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3 - 3x$

4. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I = [1; +\infty[$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

5. أحسب $(g^{-1})'(0)$

تمرين 5: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I = [0; +\infty[$ تقبل دالة

عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده

2. أحسب $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

تمرين 6: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $I = [0; 1[$ و أحسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$

2. بين أن قصور الدالة f على المجال $I = [0; 1[$ تقبل دالة عكسية

معرفة على مجال J يجب تحديده

3. حدد $f^{-1}(x)$

4. أحسب $(f^{-1})'\left(-\frac{5}{3}\right)$

تمرين 7: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [0; +\infty[$

بما يلي : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب

تحديده