الاشتقاق و تطبيقاته – دراسة الدوال

الثانية سلك بكالوريا ع ف – ع ح أ

I- الاشتقاق في نقطة -الدالة المشتقة

A) أنشطـــــــة

نشاط1 باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأفصول x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x)=x^2-2x \quad x_0=1$ ب- $f(x)=x^2-4 \quad x_0=2$

ج- $\begin{cases} f(x)=\sin x & x\le 0 \\ f(x)=x^3-2x & x\succ 0 \end{cases} \quad x_0=0$

نشاط2 حدد الدالة المشتقة f′ للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f′ في الحالات التالية

أ- $f(x)=-2x^4+3x^2-1$ ب - $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

ج – $f(x)=\sin 2x\cos x$ د – $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ ر- $f(x)=1+\tan^2 x$

نشاط3

حـدد $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+\cos \pi x}{x-1}$

B) تذكـير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 اذا كانت للدالة $x\to \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها بـ $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق لـ f في x_0. نكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2 – الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0;x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x\to \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x-\alpha;x_0]$ حيث $\alpha\succ 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x\to \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 نرمز لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق لـ f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ب – خاصية

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

3- الدالــــة المشتقة

أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرمز لها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \forall x \in I$$ بحيث g لا تنعدم على I

*- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $\quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x) \qquad \forall x \in I$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{Z}_-^*$ و f لا تنعدم على I

$$\forall x \in I \qquad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

4- الكتابة التفاضلية.

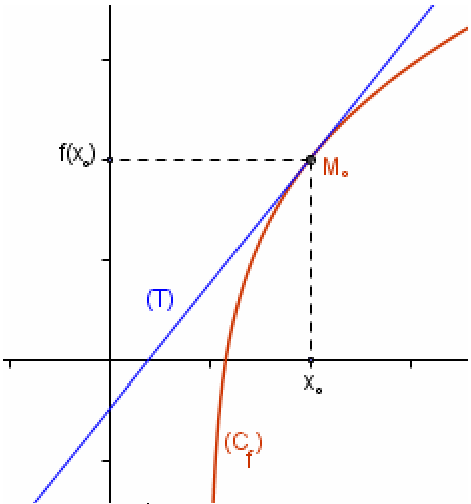
اذا كانت $y = f(x)$ و f قابلة للاشتقاق على المجال I فاننا نكتب اصطلاحا $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ أو $dy = f'(x)dx$

هذه الكتابة تسمى: **الكتابة التفاضلية.**

5- التأويل الهندسي – معادلة المماس لمنحنى دالة

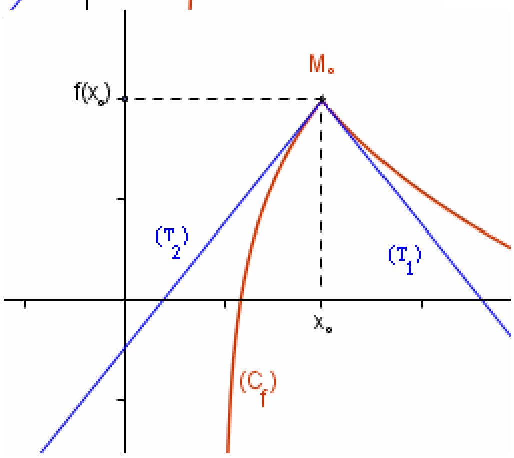
أ- المماس

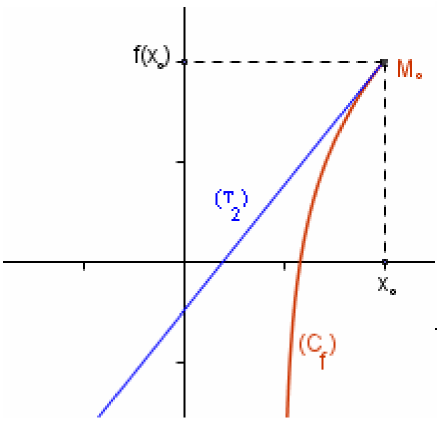
لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحناها
قابلية اشتقاق f في x_0 تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f
عند النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

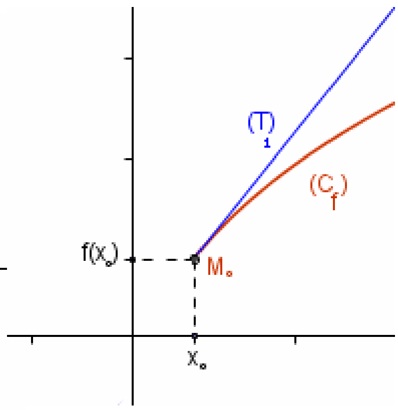


ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فان C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الافصول x_0 معامله الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)







$$\begin{cases} (T_1): y = f_d'(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (T_2): y = f_g'(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

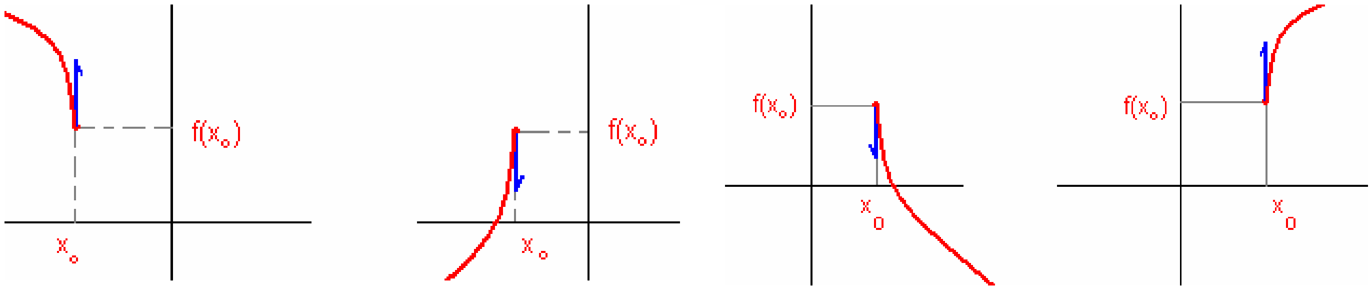
$$(T)_1 : y = f_d'(x - x_0) + f(x_0) \qquad x \geq x_0$$
$$(T_2) : y = f_g'(x - x_0) + f(x_0) \qquad x \leq x_0$$

M_0 نقطة مزواة

ج- نصف مماس مواز لمحور الاراتيب

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ فان

لـ C_f نصف مماس مواز لمحور الأراتيب.



II- مشتقة دالة مركبة – مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0.

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x\in I \qquad (g\circ f)'(x)=g'\big(f(x)\big)\times f'(x)$$

نتيجة

اذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و موجبة قطعا على I و g دالة معرفة على I بـ $g(x)=\sqrt{f(x)}$

فان g قابلة للاشتقاق على I و $\forall x\in I \quad g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x)=\cos\left(x^3-4x^2\right) \quad (a \qquad ; \qquad f(x)=\sqrt{x^2-x} \quad (b$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0)\neq 0$ فان الدالة f^{-1} للاشتقاق في $f(x_0)$ و $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$

مثال : نعتبر $f(x)=\tan x \qquad \forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ نحدد $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ثم $\left(f^{-1}\right)'(1)$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ لدينا $f'(x)=1+\tan^2 x \qquad \forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\neq 0$ و منه $\left(f^{-1}\right)'\left(f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$ أي $\left(f^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{2}$

خاصية

إذا f دالة رتيبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I فان الدالة f^{-1} قابلة

للاشتقاق في $f(I)$ و $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\quad \forall x\in f(I)$

3- تطبيقات

أ- مشتقة دالة الجدر من الرتبة n

لدينا الدالة $f:x\to x^n$ تزايدية قطعا وقابلة الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لا تنعدم على $]0;+\infty[$

و $f\left(]0;+\infty[\right)=]0;+\infty[$ و $f'(x)=nx^{n-1}$

ومنه الدالة العكسية $f^{-1}:x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

و $$\forall x\in]0;+\infty[\quad \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}=\frac{1}{f'\left(\sqrt[n]{x}\right)}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

خاصية

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$

ملاحظة

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{1-n}=\frac{1}{n}\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{1-n}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left((x)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

نتيجة

$$\left(x^r\right)'=\left(\sqrt[q]{x^p}\right)'=px^{p-1}\times\frac{1}{q}\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}-1}=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}=rx^{r-1}$$ حيث $\dfrac{p}{q}$ $\quad (p;q)\in\mathbb{N}^{*2}$

نتيجة

ليكن r من $\mathbb{Q}^*$. الدالة $x\to x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$

تمرين

$f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}\qquad g(x)=x^{\frac{2}{3}}$

أدرس اشتقاق f و g و حدد الدالتين المشتقتين لهما

خاصية

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $n\in\mathbb{N}^*$ فان الدالة $x\to\sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I.

$$\forall x\in I\quad \left(\sqrt[n]{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{n\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}}\qquad \left(\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot f'(x)$$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعا على I و $r\in\mathbb{Q}$.

$$\forall x\in I\quad \left(\left(f(x)\right)^r\right)'=r\left(f(x)\right)^{r-1}\cdot f'(x)$$

تمرين أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

1- $f(x)=\sqrt[3]{x^2-2x}$ مع إعطاء جدول التغيرات $\quad$ 2 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-1)^2}$ $\quad$ 2- $f(x)=\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2$

3- $f(x)=\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{5}}$ $\quad$ 4- $f(x)=\left(\left(x^2-1\right)^2\right)^{\frac{1}{5}}$

ب- مشتقة الدالة arctan

الدالة arctan هي الدالة العكسية للدالة f المعرفة من $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\tan x$

بما أن f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $\left(f'(x)=1+\tan^2 x\right)$ فان الدالة arctan قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\arctan' x=\frac{1}{f'(\arctan x)}=\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}=\frac{1}{x^2+1}$

خاصية

* الدالة arctan قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\arctan' x=\frac{1}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

خاصية

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I فان الدالة $\arctan\circ u$ قابلة للاشتقاق على I

و $\left(\arctan\circ u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{1+\left(u(x)\right)^2}$ $\forall x\in I$

تمرين 1- أحسب مشتقة f بعد تحديد حيز تعريفها في الحالتين

$f(x)=\arctan\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ $\qquad$ $f(x)=\arctan\sqrt[3]{x}$

2- حدد $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(x^2+3x\right)}{x}$

جدول مشتقات بعض الدوال

$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^n $\quad n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n $\quad n\in\mathbb{Z}^{*-}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\{x\in D_{u'}/u(x)\succ 0\}$
$x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$	$]0;+\infty[$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$	$\{x\in D_{u'}/u(x)\succ 0\}$
x^r $\quad r\in\mathbb{Q}$	rx^{r-1}	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$	$1+\tan^2 x$	$\tan x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$D_{u'}$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$	$\arctan(u(x))$

III- الدوال الأصلية

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان $\forall x\in I \quad F'(x)=f(x)$

أمثلة الدالة $F:x\to x^2+2x$ دالة أصلية للدالة $f:x\to 2x+2$ على $\mathbb{R}$

الدالة $F:x\to\cos x+3$ دالة أصلية للدالة $f:x\to-\sin x$ على $\mathbb{R}$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I

مجموعة الدوال الأصلية لـلدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F+\lambda$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$.

أمثلة - الدالة $F:x\to x^2+2x$ دالة أصلية للدالة $f:x\to 2x+2$ على $\mathbb{R}$

إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F_\lambda(x)=x^2+2x+\lambda$

خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$

توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0)=y_0$.

مثال نحدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^3-2x+3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

خاصية

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda\in\mathbb{R}$ فان

* $F+G$ دالة أصلية لـ $f+g$

* λF دالة أصلية لـ λf

خاصية

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

مثال $\begin{cases} f(x)=x-3 & x\geq 2 \\ f(x)=x^2-5 & x\prec 2\end{cases}$ بين أن f تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ و حدد الدوال الأصلية لـ f.

جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f	الدوال الأصلية F	مجموعة التعريف I للدالة f و الدوال F
0	λ	$I=\mathbb{R}$
a	$ax+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$x^n \quad n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$x^n \quad n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}_+^* \quad ou \quad I=\mathbb{R}_-^*$

x^n $\quad n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\lambda$	$I=\mathbb{R}_+^*$ ou $I=\mathbb{R}_-^*$
x^r $\quad r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}+\lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$a\neq 0 \quad \cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$a\neq 0 \quad \sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+\lambda$	$I=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\; ; k\in\mathbb{Z}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x+\lambda$	$I=\mathbb{R}$
$f^r\cdot f'$ $\quad r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$	$\frac{1}{r+1}f^{r+1}+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه f^r معرفة و f قابلة للاشتقاق
$f+g$	$f+g+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق
$f'g+fg'$	$fg+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق
$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}+\lambda$	I هو المجال التي تكون فيه g و f قابلتان للاشتقاق و لا تنعدم فيه g

تمارين

-1 $f(x)=x(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ حدد دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

(لاحظ أن $f(x)=\alpha u'(x)(u(x))^n$ حيث α و n معلومين)

-2 $f(x)=\frac{3}{4x^2+4x+2}$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x)=\alpha\frac{u'(x)}{(u(x))^2+1}$)

-3 $f(x)=\cos^3 x$ حدد دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$)

IV- تطبيقات الاشتقاق – دراسة الدوال

A – الأنــشطة

تمرين1

-1 حدد رتابة الدالة f و مطاريفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالتين التالين.

أ- $f(x)=x(x-3)^2$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

-2 حدد عدد جذور المعادلة $x^3+2x^2-7x+1=0$

تمرين 2

أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتن(إن كان ممكنا) .

أ- $f(x)=x^4-2x^3-13x$ ب- $f(x)=\cos x-\sin x$

ج- $f(x)=x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 و مع ذلك تقبل نقطة انعطاف في $O(0;0)$)

تمرين 3

- حدد المقاربات إن وجدت
- أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية

أ- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{-2x^2+x+3}$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ج- $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ د - $f(x)=x+\sqrt{x}$

ر- $f(x)=x+\sin 2\pi x$

تمرين4

1- نعتبر $f(x)=x^3-3x^2+x+3$ بين ان $A(1;2)$ مركز تماثل للمنحنى C_f

2- نعتبر $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

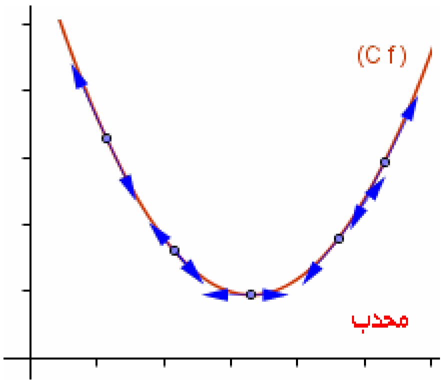
بين ان المستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

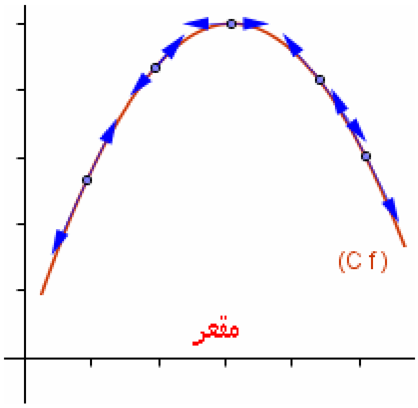
B- تذكير مع بعض الاضافات

1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1تعـريف

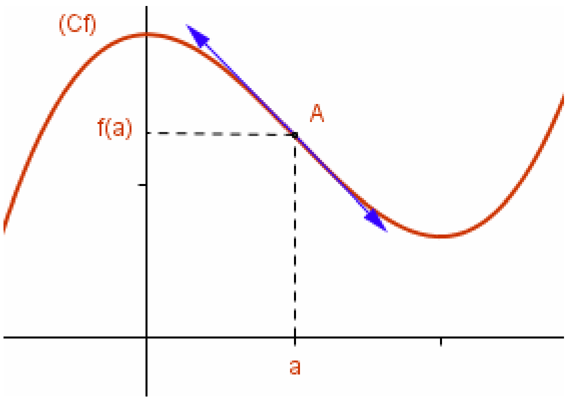
لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته





2-1 خـاصيات

f دالة قابلة الاشتقاق مرتين على مجال I
* إذا كانت f'' موجبة علىI فان (C_f) يكون محدبا علىI
* إذا كانت f'' سالبة علىI فان (C_f) يكون مقعرا علىI
* اذا كانت " f تنعدم في x_0 من المجال I وكان يوجد $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة " f على $[a;a+\alpha[$ مخالفة لإشارة " f على $]a-\alpha,a]$ فان $A(a;f(a))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



ملاحظة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

2 الفروع اللانهـــائية

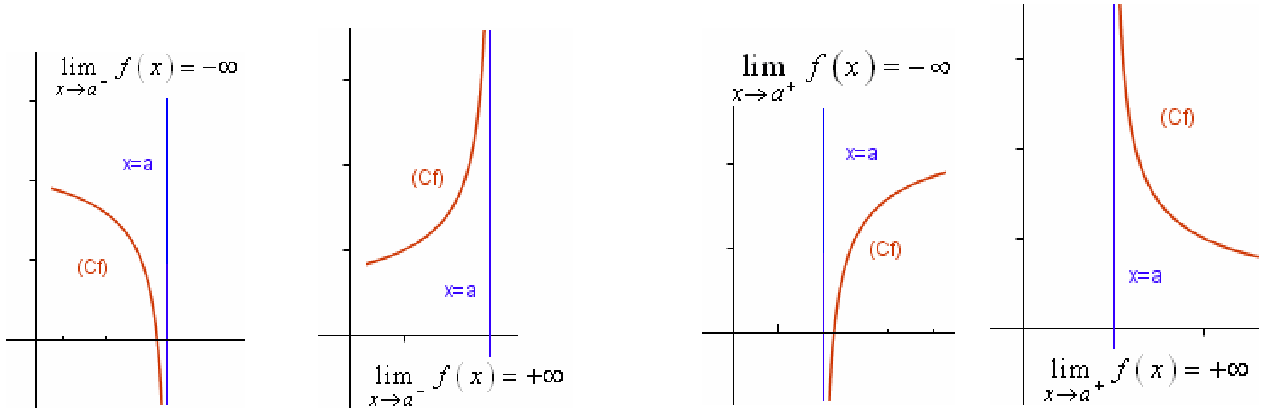
1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

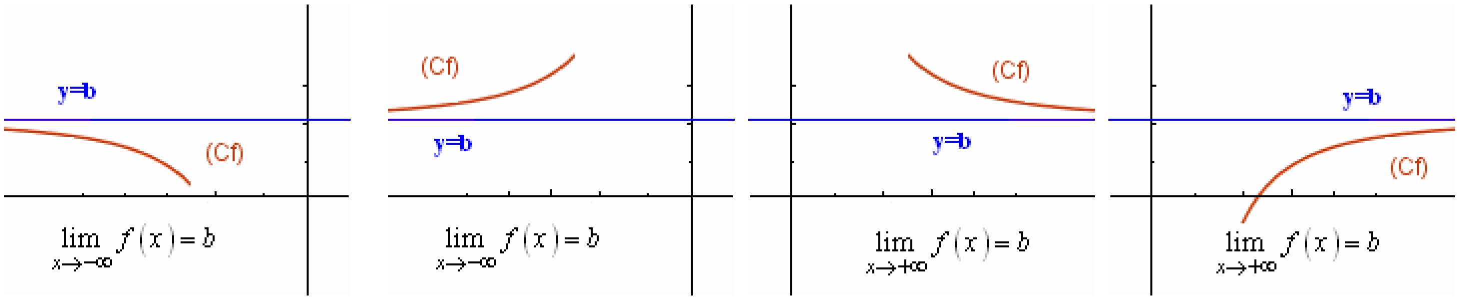
a- مقارب عمودى

إذا كان $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب ل (C_f)



b- مقارب أفقي

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ فان المستقيم الذي معادلته $y=b$ مقارب ل (C_f)



c- مقارب عمودى

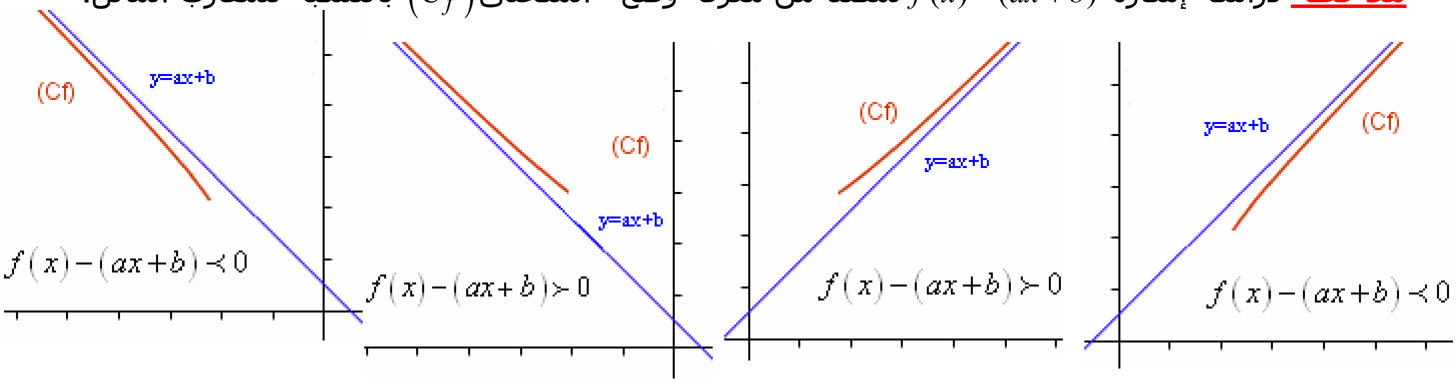
يكون المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-(ax+b))=0$

خا صية

يكون المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax)=b$

ملاحظة دراسة إشارة $f(x)-(ax+b)$ تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.



2-3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم اذا المعادلة $y=ax$ كاتجاه مقارب

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3- 1 خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته $x=a$ محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان $\forall x\in D_f \qquad f(2a-x)=f(x)$

2-3 خاصية

في معلم متعامد,تكون النقطة $E(a;b)$ مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان

$\forall x\in D_f \qquad f(2a-x)=2b-f(x)$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا ب

$\forall x\in D_f \quad x+T\in D_f;\quad x-T\in D_f \quad f(x+T)=f(x)$ حيث

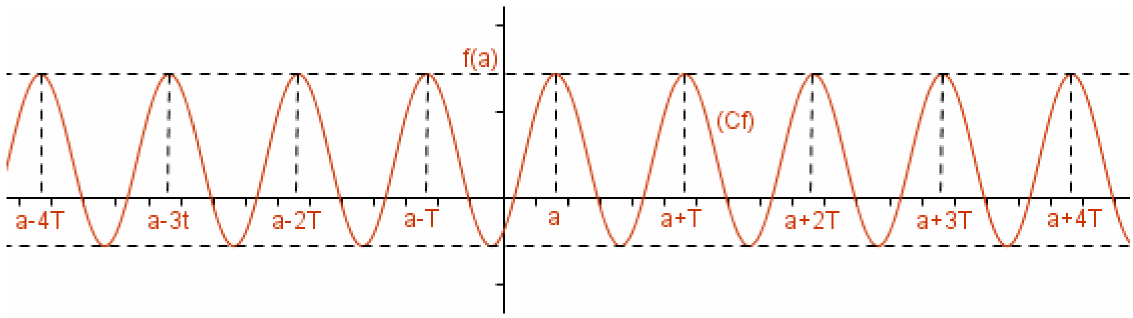
العدد T يسمى دور الدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالة f

4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\forall x\in D_f ,\forall n\in\mathbb{Z} \quad f(x+nT)=f(x)$

3-4 خاصية

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f\cap[a+nT;a+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f\cap[a,a+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.



C- دراسة الدوال

تصميم دراسة دالة

لدراسة دالة f في غالب الأحيان نتبع الخطوات التالية

- تحديد مجموعة التعريف ثم تحديد مجموعة الدراسة (خاصة إذا كانت f زوجية أو فردية أو دورية)
- دراسة الاتصال و الاشتقاق و تحديد الدالة الاشتقاق و دراسة إشارتها بالإضافة إلى التأويلات الهندسية
- وضع جدول التغيرات
- دراسة الفروع الانهائية و تحديد المقاربات
- دراسة التقعر ان كان ذلك ضروريا و تحديد نقط انعطاف إن وجدت
- إنشاء المنحنى