



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

سنة 2015 - 2016

تصحيح سلسلة : اتصال دالة عددية

01.

ندرس اتصال الدالة f في x_0 ؟ (وذلك في النقطة x_0 إذا كان ذلك ممكنا و إذا لم يكن ممكن على اليمين أو اليسار) .

$$01. \quad \begin{cases} f(x) = \frac{(x-2)(x^2+1)}{x^2-3x+2} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \\ f(2) = 5 \end{cases} \quad \text{ندرس اتصال في } x_0 = 2.$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{x^2-3x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+1)}{(x-1)} \\ &= 5 \\ &= f(2) \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0 = 2$.

$$02. \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ندرس اتصال في } x_0 = 1.$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$.



$$\text{ندرس اتصال في } x_0 = 4 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} ; x \in [2, +\infty[\setminus \{4\} \\ f(4) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

03

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\cancel{x-4})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\cancel{x-4})(\sqrt{2x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= f(4) \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0 = 4$.

$$\text{ندرس اتصال في } x_0 = -1 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ f(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

04

• اتصال f على يمين $x_0 = -1$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1-2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} ; \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+ \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ



الصفحة

سنة 2015 - 2016

تصحيح سلسلة : اتصال دالة عددية

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0 = -1$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = -1$.

• اتصال f على يسار $x_0 = -1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} ; \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0^- \right) \\ &= -\infty\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = -1$.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}} ; x > 1 \\ f(x) = \frac{2\sin(x-1)}{x-1} ; x < 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

ندرس اتصال في $x_0 = 1$.

• اتصال f على يمين $x_0 = -1$ ؛ لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}} \\ &= 0 ; \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \sin(x^2-1) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \right) \\ &\neq f(1) ; (f(1) = 2)\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0 = 1$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$.

• اتصال f على يسار $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sin(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2\sin t}{t} ; (t = x-1 ; (x \rightarrow 1^-) \Rightarrow (t \rightarrow 0^-)) \\ &= 2 ; \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \right) \\ &= f(1)\end{aligned}$$



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ

سنة 2015 - 2016

تصحيح سلسلة : اتصال دالة عددية

الصفحة



ومنه : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ لأنها غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

$$\text{ندرس اتصال في } x_0 = \pi \quad \begin{cases} f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x} & ; x \in]-\pi, \pi[\\ f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2 - \pi^2}}{x} & ; x \in]-\infty, -\pi] \cup [\pi, +\infty[\end{cases}$$

06

• اتصال f على يمين $x_0 = \pi$
لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} x + \frac{\sqrt{x^2 - \pi^2}}{x} \\ &= \pi & ; \left(\lim_{x \rightarrow \pi^+} x^2 - \pi^2 = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} x = \pi \right) \\ &= f(\pi) & ; \left(f(\pi) = \pi \right) \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0 = \pi$.

• اتصال f على يسار $x_0 = \pi$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 + \cos x}{\sin x} & ; \cos x = \cos\left(2 \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad ; \quad \sin x = \sin\left(2 \frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & ; \left(\lim_{t \rightarrow \pi^-} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \pi^-} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \right) \\ &= 0 & ; \left(f(\pi) = \pi \right) \\ &\neq f(\pi) \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \neq f(\pi)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = \pi$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ لأنها غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

ملحوظة : يمكنك حساب النهاية على اليسار بطريقة أخرى

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 + \cos x}{\sin x} ; (x = \pi - t ; (x \rightarrow \pi^-) \Rightarrow (t \rightarrow 0^+)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos(\pi - t)}{\sin(\pi - t)} ; (\cos(\pi - t) = -\cos t ; \sin(\pi - t) = \sin t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{\sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t} \times \frac{t}{\sin t} ; \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right) \\ &= 0 \times 1 \\ &= 0 ; (f(\pi) = \pi) \\ &\neq f(\pi) \end{aligned}$$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = \pi$.

02.

$$f(x) = \begin{cases} x + a\sqrt{x^2 + x + 1} & ; x \leq 0 \\ x^2 - x & ; 0 < x \leq 1 \\ bx - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} & ; x > 1 \end{cases}$$

01. نحدد a و b لكي تكون f متصلة في 0 و 1.

• اتصال f في $x_0 = 0$ (مع $f(0) = 0 + a\sqrt{0^2 + 0 + 1} = a$)

- على يمين $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x = 0 = a$ و $f(0) = a$ إذن لكي تكون f متصلة على يمين $x_0 = 0$ يجب $x_0 = 0$ و منه : $a = 0$.

- على يسار $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x + a\sqrt{x^2 + x + 1} = a = f(0)$ إذن f متصلة على يسار $x_0 = 0$.

وبالتالي : لكي تكون f متصلة في $x_0 = 0$ يجب أن يكون $a = 0$.

• اتصال f في $x_0 = 1$ (مع $f(0) = 0 + a\sqrt{0^2 + 0 + 1} = a$)

- على يمين $x_0 = 1$

لدينا :



سلسلة رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع. ح. أ



الصفحة

سنة 2015 - 2016

تصحيح سلسلة : اتصال دالة عددية

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} bx - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} bx - \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} bx - \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} bx - \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)} \\ &= b-2\end{aligned}$$

و $f(1) = 1^2 - 1 = 0$ إذن لكي تكون f متصلة على يمين $x_0 = 1$ يجب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b-2 = 0$ ومنه : $b = 2$.
- على يسار $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x = 0 = f(1) \text{ إذن } f \text{ متصلة على يسار } x_0 = 1 .$$

وبالتالي : لكي تكون f متصلة في $x_0 = 1$ يجب أن يكون $b = 2$.

خلاصة : لكي تكون f متصلة في 0 و 1 يجب : $a = 0$ و $b = 2$.

02 نحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:
لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} ; (b=2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+3}-2} \right) ; \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - 2 = +\infty \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:
لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + a\sqrt{x^2+x+1} ; (a=0) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \\ &= -\infty\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

هل يمكن تمديد بالاتصال الدوال التالية في النقطة x_0 .

.01 $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1}$ في $x_0 = -\frac{1}{2}$ لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x-1)(2x+1)}{2x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} x - 1 \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

خلاصة : يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

حيث تمديد بالاتصال ل f في النقطة $x_0 = -\frac{1}{2}$ هي الدالة g المعرفة ب :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{2x + 1} ; x \neq -\frac{1}{2} \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

ملحوظة : كذلك الدالة h المعرفة ب : $h(x) = x - 1$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -\frac{1}{2}$

.02 $f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}$ في $x_0 = 0$ لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x - (4-x)}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})} \\ &= \frac{1}{2} ; \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} = 4 \right) \end{aligned}$$

خلاصة : يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x} ; x \in [-4; 0[\cup]0; 4] \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حيث تمديد بالاتصال ل f في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة g المعرفة ب :

ملحوظة : كذلك الدالة h المعرفة ب : $h(x) = \frac{2}{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 0$

04.

لنعتبر الدالة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ متصلة و جدول تغيراتها كالتالي :

01. ما هو عدد حلول المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$.

- هناك حل على المجال : $]-\infty; -5]$ أو المجال $]-\infty; -5[$.
- هناك حل على المجال : $]-5; 0]$ أو $]-5; 0[$ أو
- هناك حل على المجال : $]0; 1]$ أو
- هناك حل على المجال : $]1; 3]$ أو

خلاصة : المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$ لها 4 حلول .

02. ما هو عدد حلول المعادلة : $x \in [0; 10] / f(x) = 2$.

- هناك حل على المجال : $]0; 1]$ أو
- هناك حل على المجال : $]1; 3]$ أو
- هناك حل على المجال : $[3; 10]$.
- هناك حل على المجال : $[10; +\infty[$.

خلاصة : المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = 2$ لها 4 حلول .

03. حدد حل المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = -10$.

الحل هو $x = 1$.

خلاصة : حل المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = -10$ هو $x = 1$.

04. نحدد صور المجالات التالية بواسطة f : $]-\infty; -5]$ و $]-\infty; 0]$ و $]-5; 3]$ و $]1; 3[$ و $]3; 10[$ و $]0; +\infty[$ و $\mathbb{R}$.

لدينا :

- $f(]-\infty; -5]) = [-5; 1[$.
- $f(]-\infty; 0]) = [-5; 3]$.
- $f(]-5; 3]) = [-10; 3]$.
- $f([1; 3[) = [-10; 3[$.
- $f([3; 10[) =]2; 3[$.



الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء + 2 ع.ح. أ.

• $f([0, +\infty[) = [-10; +\infty[$

• $f(\mathbb{R}) = [-10; +\infty[$

05. هل الدالة f تقبل دالة عكسية من المجال I إلى $f(I)$. أ- $I =]-\infty, -5]$ ب- $I =]-\infty, 0[$ ج- $I =]1, 3]$.

• على المجال $I =]-\infty, -5]$.

- حسب المعطيات الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة على $I =]-\infty, -5]$.

- حسب جدول تغيرات الدالة f تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, -5]$.

خلاصة : قصور الدالة f تقبل دالة عكسية من المجال $I =]-\infty, -5]$ إلى $f(I) = [-5; 1[$.

• على المجال $I =]-\infty, 0[$.

- حسب المعطيات الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة على $I =]-\infty, 0[$.

- حسب جدول تغيرات الدالة f ليست رتيبة قطعاً على $I =]-\infty, 0[$.

خلاصة : قصور الدالة f لا تقبل دالة عكسية من المجال $I =]-\infty, 0[$ إلى $f(I)$.

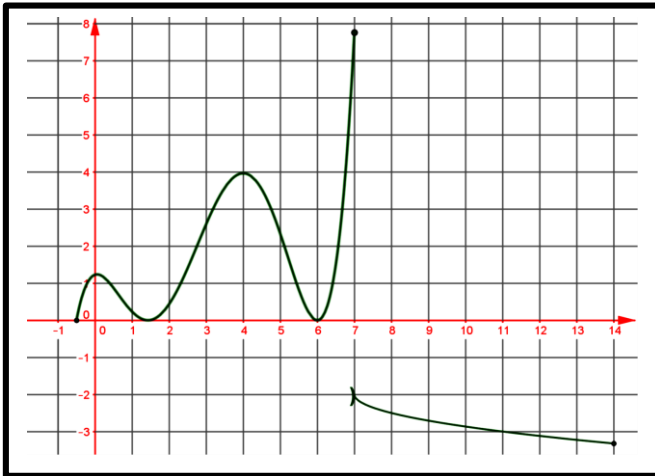
• على المجال $I =]1, 3]$.

- حسب المعطيات الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة $I =]1, 3]$.

- حسب جدول تغيرات الدالة f تزايدية قطعاً على $I =]1, 3]$.

خلاصة : قصور الدالة f تقبل دالة عكسية من المجال $I =]1, 3]$ إلى

$f(I) = [-10; 3]$



05.

لتكن f دالة عددية معرفة على $[-0, 5; 14]$ و الشكل التالي يمثل منحناها .

01. أعط نص أو منطق مبرهنة القيم الوسيطة .

منطق مبرهنة القيم الوسيطة :

f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$. $(a < b)$

▪ لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ حيث $f(c) = k$.

02. أوجد مجالين حيث يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة مع توضيح ذلك .

• يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة على المجال $[0; 5]$ ؛ مبيانيا الدالة f متصلة على $[0; 5]$.

• يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة على المجال $[8; 14]$ ؛ مبيانيا الدالة f متصلة على $[8; 14]$.

03. أوجد مجال حيث لا يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة مع توضيح ذلك .

• لا يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة على المجال $[4; 11]$ ؛ مبيانيا الدالة f غير متصلة على $[4; 11]$ (لأنها غير متصلة في 7)

لدينا : $f(4) = 4$ و $f(11) = -3$ نأخذ $k = -1$ هو محصور بين $f(4) = 4$ و $f(11) = -3$ ولكن لا يوجد c من $[4; 11]$ حيث $f(c) = -1$.

04. يمكن إيجاد عدد β وحيد حيث $f(\beta) = 6$ تقاطع المنحنى و المستقيم (D) الذي معادلته $y = 6$ (D) يحدد نقطة وحيدة ذلك ؟
نعطي تاثير ل β ؛ مبيانيا $6,5 < \beta < 7$.

06.

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x^2 \cos^5 x + x \sin x + 1$

01. نحسب : $f(0)$ و $f(\pi)$ ثم بين أن المعادلة : $x^2 \cos^5 x + x \sin x + 1 = 0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$.
لدينا :

- الدالة f هي متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع و جداء دوال متصلة $\mathbb{R}$ إذن الدوال f متصلة على $[0; \pi]$.
 - $f(0) = 1 > 0$ و $f(\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$ لأن $f(0) \times f(\pi) < 0$ إذن 0 محصور بين $f(0)$ و $f(\pi)$
- إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطة يوجد على الأقل c من $[0; \pi]$ حيث $f(c) = 0$ و بالتالي $f(x) = 0$ تقبل حل الأقل حل على $[0; \pi]$ ومنه $x^2 \cos^5 x + x \sin x + 1 = 0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$.

خلاصة : المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$.

07.

❖ لنعتبر f الدالة المعرفة على $[0, 2]$ بما يلي : $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

01. باستعمال دروس السنة الماضية أو باستعمال البرنامج **geogebra** (أو برنامج آخر مثل **Cabri2+**) ننشئ منحنى f ثم استنتج أن f

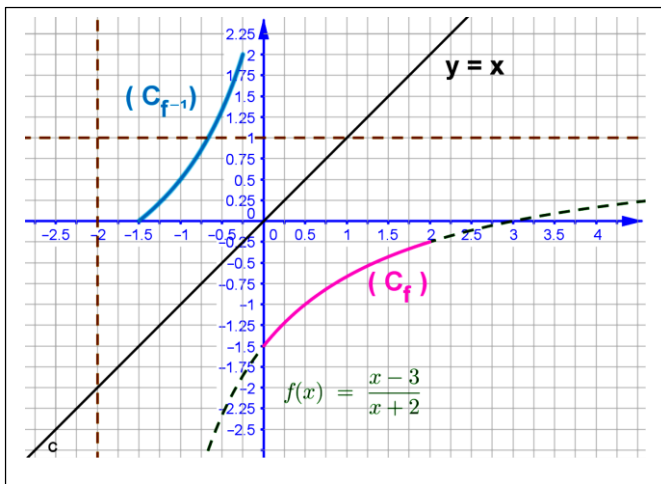
هي تقابل من $[0, 2]$ نحو J حدده مبيانيا .

مبيانيا الدالة f متصلة و تزايدية قطعاً على $[0, 2]$ و $J = [-0,5; 0,25]$

خلاصة : f هي تقابل من $[0, 2]$ نحو $J = [-0,5; 0,25]$

02.

- أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة العكسية f^{-1} . (أنظر الشكل)
- حدد f^{-1} الدالة العكسية ل F .
- ليكن x من $[0, 2]$ و y من $J = [-0,5; 0,25]$ حيث $y = f(x)$ و $x = f^{-1}(y)$



$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2} = y$$

$$\Leftrightarrow x-3 = xy+2y$$

$$\Leftrightarrow x-xy = 3+2y$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) = 3+2y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+2y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3+2y}{1-y} = f^{-1}(y)$$

$$\text{و منه : } f^{-1}(y) = \frac{3+2y}{1-y}$$

$$f^{-1} : J = [-0,5; 0,25] \rightarrow [0,2]$$

$$\text{خلاصة : الدالة العكسية } f^{-1} \text{ لـ } f \text{ هي : } x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{3+2x}{1-x}$$

$$\diamond \text{ لنعتبر } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ الدالة المعرفة بـ : } f(x) = (x-4)^2 + 2$$

01.

$$\text{أ- نحسب : } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-4)^2 + 2 = +\infty$$

ب- أدرس اتصال الدالة على المجموعة $\mathbb{R}$.

الدالة f هي متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها محدودة.

02. بين أن : الدالة f تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 4]$.

$$\text{لدينا : } f'(x) = 2(x-4) \text{ و منه : على } I =]-\infty, 4[\text{ فإن } f'(x) < 0 \text{ الدالة } f$$

تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 4]$. ملحوظة : يمكنك استعمال معدل تغيرات f لدراسة الرتابة.

خلاصة : الدالة f تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 4]$.

03. لنعتبر g قصور الدالة f على $I =]-\infty, 4]$ بين أن : g تقابل من I إلى مجال J يتم تحده.

• الدالة f هي متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها g هي متصلة على $I =]-\infty, 4]$.

• الدالة f تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 4]$ إذن قصورها g تناقصية قطعاً على $I =]-\infty, 4]$.

$$\text{خلاصة : } g \text{ قصور الدالة } f \text{ على } I =]-\infty, 4] \text{ هي } g \text{ تقابل من } I \text{ إلى مجال } J = [2; +\infty[$$

04. نحدد للدالة العكسية g^{-1} للدالة g .

$$\text{ليكن } x \text{ من } I =]-\infty, 4] \text{ و } y \text{ من } J = [2; +\infty[\text{ مع } g(x) = y \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow (x-4)^2 + 2 = y$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = y-2 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow x-4 = \sqrt{y-2} \vee x-4 = -\sqrt{y-2}$$

بما أن : $x \in I =]-\infty, 4]$ إذن $x \leq 4$ ومنه $x-4 \leq 0$ بالنسبة ل $x-4 = \sqrt{y-2}$ غير ممكن لأن :

ومنه نأخذ $x-4 = -\sqrt{y-2}$ إذن $x = 4 - \sqrt{y-2}$.

ومنه : $g^{-1}(y) = 4 - \sqrt{y-2}$.

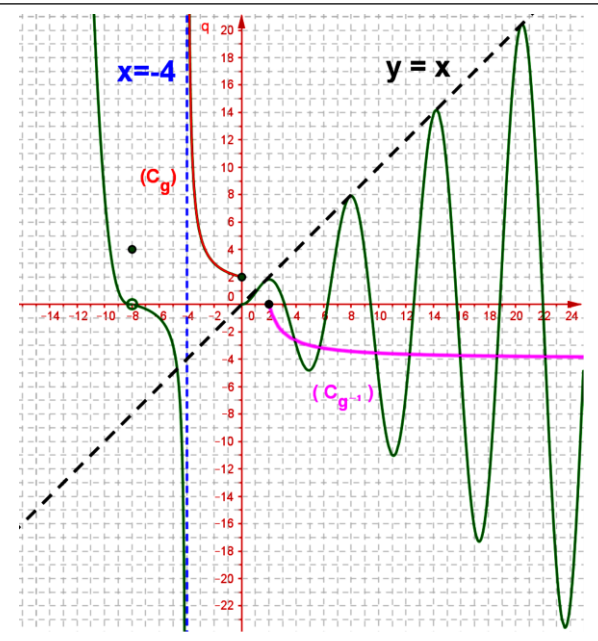
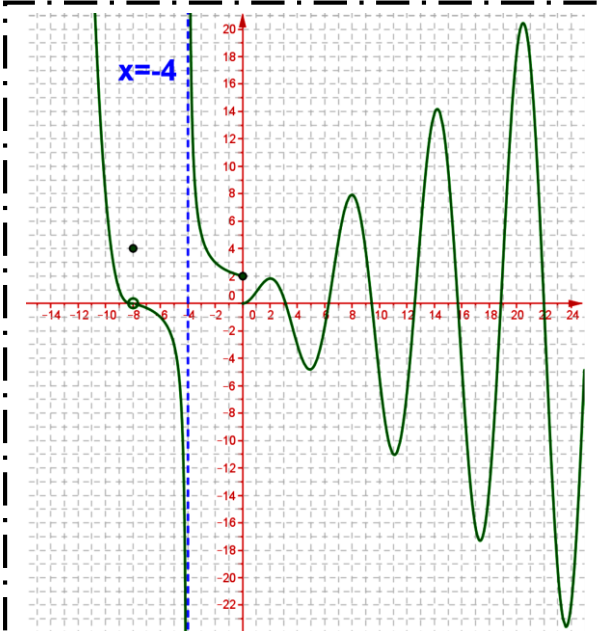
$$g^{-1} : [2; +\infty[\rightarrow]-\infty, 4]$$

$$x \mapsto g^{-1}(x) = 4 - \sqrt{x-2}$$

$$g^{-1} : [2; +\infty[\rightarrow]-\infty, 4]$$

$$y \mapsto g^{-1}(y) = 4 - \sqrt{y-2}$$

خلاصة :



08.

نعتبر الدالة العددية f التي منحناها هو :

01. حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف f .

مبيانيا : مجموعة تعريف f هي $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

02. استنتج مبيانيا : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -8} f(x)$.

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ مبيانيا f ليس لها نهاية عند $+\infty$.

03. أ- هل f متصلة على يمين 0 ؟ على يسار 0 ؟ : متصلة في $x_0 = 0$ ؟

f غير متصلة على يمين 0 .

f متصلة على يسار 0 .

f غير متصلة في 0 .

ب- نعطي جدول تغيرات f $]-4; 3]$.

x	4	0	3
f(x)	$+\infty$	$f(0) = 2$	2
		↘	↗
		0	

04. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]-4; 0]$.

أ- بين أن : g تقبل دالة عكسية g^{-1} من J إلى I مع تحديد J مبيانيا.

مبيانيا الدالة g قصور الدالة هي متصلة على $I =]-4; 0]$.

مبيانيا الدالة g قصور الدالة هي تناقصية قطعاً على $I =]-4; 0]$.

خلاصة : g قصور الدالة f على $I =]-4; 0]$ هي تقابل من $I =]-4; 0]$ إلى مجال $[2; +\infty[$ $f(]-4; 0]) = [2; +\infty[$

$$J = f(]-\infty, 4]) = [g(4); \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)[= [2; +\infty[$$

ب- أنشئ $(C_{g^{-1}})$ منحنى f في نفس المعلم. (أنظر الشكل)

.09

نضع : $a = \sqrt[3]{41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}}$ و $b = \sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}$

.01 باستعمال المحسبة (الآلة الحاسبة) هل ab هو $\frac{1}{3}$ ؛ 1 ؛ 7 ؛ $\frac{7}{3}$.

خلاصة : باستعمال المحسبة : $ab = 7$

.10

.01 بين أن: و $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{3^9 \times 2^8} = 6$ و $\frac{(\sqrt[5]{3^9})^2 \times 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{27} \times 3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3} \times \sqrt{3}} = 9$ اجعل المقام عدد جذري : $\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}$

• لدينا :

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{3^9 \times 2^8} &= \sqrt[4 \times 3]{3^3} \times \sqrt[3 \times 4]{2^4} \times \sqrt[12]{3^9 \times 2^8} \\ &= \sqrt[12]{3^3 \times 2^4 \times 3^9 \times 2^8} \\ &= \sqrt[12]{3^{12} \times 2^{12}} \\ &= \sqrt[12]{(2 \times 3)^{12}} = 6 \end{aligned}$$

خلاصة : $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{3^9 \times 2^8} = 6$

• لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt[5]{3^9})^2 \times 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{27} \times 3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3} \times \sqrt{3}} &= \frac{(\sqrt[15]{9})^2 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\left(3^{\frac{2}{15}}\right)^2 \times 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{3^{\frac{4}{15}} \times 3^{\frac{12}{5}} \times 3^{-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}}}{3^{\frac{4}{15} + \frac{12}{5} - \frac{2}{3}}} = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

خلاصة : $\frac{(\sqrt[5]{3^9})^2 \times 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{27} \times 3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3} \times \sqrt{3}} = 9$

• اجعل المقام عدد جذري :

تذكير :

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ إذن $(a - b)$ و $(a^2 + ab + b^2)$ إحداهما الصيغة المرافق للآخر بالنسبة للجذر من الرتبة 3 .

مثال : $\sqrt[3]{x} - 2 = \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} \times 2 + 2^2)}{(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} \times 2 + 2^2)}$ نأخذ $a = \sqrt[3]{x}$ و $b = 2$.

لدينا :

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \times 1 + 1^2} = \frac{2(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \times 1 + 1^2)(\sqrt[3]{3} - 1)} = \frac{2(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{3})^3 - 1^3} = \frac{2(\sqrt[3]{3} - 1)}{3 - 1} = \sqrt[3]{3} - 1$$

خلاصة : $\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} - 1$

11.

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ؛ $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x+3)}$ ؛ $f(x) = \sqrt[6]{9-x^2} - \sqrt[7]{x+1}$.

01. نحدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

• نعتبر الدالة العددية التالية: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.

لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$.

• نعتبر الدالة العددية التالية: $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x+3)}$.

لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$.

• نعتبر الدالة العددية التالية: $f(x) = \sqrt[6]{9-x^2} - \sqrt[7]{x+1}$.

لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \text{ و } x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(3+x) \geq 0 \text{ و } x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\text{ و } x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in (]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[) \cap [1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in [3; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$

12.

أحسب النهايات التالية :

01. نحسب النهايات :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} = +\infty$ لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + x + 1 = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[5]{x^4 + 1} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt[6]{4-x}}{x} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt[6]{4-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4^-} x = 4$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x-1} = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$

• لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} - 1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} - 1}{x \times \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 1} ; \left(|x^3| = x; |x^2| = x; x \rightarrow +\infty \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} - \frac{1}{x} \right]}{x \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \frac{1}{x} \right]}$$

$$= 1 ; \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} - \frac{1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - \frac{1}{x} = 1 \right)$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = 1$

• لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[4]{x^5 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} - \sqrt[4]{x^5 \left(1 + \frac{1}{x^5}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - x \times \sqrt[4]{x \left(1 + \frac{1}{x^5}\right)} ; \left(\sqrt[4]{x^5} = \sqrt[4]{x^4} \times \sqrt[4]{x} = x \times \sqrt[4]{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} - \sqrt[4]{x \left(1 + \frac{1}{x^5}\right)} \right] \\ &= -\infty ; \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt[4]{x \left(1 + \frac{1}{x^5}\right)} = -\infty \right)\end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt[4]{x^5 + 1} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt[4]{x^5 + 1}}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x + 2} - \sqrt[4]{3x - 2}}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \frac{1}{3} ; \left(\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 = 3 \right)\end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x)(\sqrt[3]{x^3 + x + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x + 1} \times x + x^2)}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}^2 - \sqrt[3]{x^3 + x + 1} \times x + x^2}$$

(استعمال المرافق)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x + 1} \times x + x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x + 1} \times x + x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} \times x + x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + x \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} \times x + x^2} \left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} = \sqrt[3]{(x^3)^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} + 1 \right)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

لأن :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} &= 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} + 1 = 3 \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} + 1 \right) &= +\infty
 \end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x = 0$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \text{ لدينا : }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2} - 1\right) \left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2} \times 1 + 1^2\right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2} \times 1 + 1^2\right)} \quad (\text{استعمال المرافق})$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}^3 - 1^3}{x^2 \left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2} \times 1 + 1^2 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x^2 \left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{3}$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{3x+2}}{x}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{3x+2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{3x+2} \right) \left(\sqrt[4]{x+2}^3 + \sqrt[4]{x+2}^2 \times \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{x+2} \times \sqrt[4]{3x+2}^2 + \sqrt[4]{3x+2}^3 \right)}{x \left(\sqrt[4]{x+2}^3 + \sqrt[4]{x+2}^2 \times \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{x+2} \times \sqrt[4]{3x+2}^2 + \sqrt[4]{3x+2}^3 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+2}^4 - \sqrt[4]{3x+2}^4}{x \left(\sqrt[4]{x+2}^3 + \sqrt[4]{x+2}^2 \times \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{x+2} \times \sqrt[4]{3x+2}^2 + \sqrt[4]{3x+2}^3 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2 - (3x+2)}{x \left(\sqrt[4]{x+2}^3 + \sqrt[4]{x+2}^2 \times \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{x+2} \times \sqrt[4]{3x+2}^2 + \sqrt[4]{3x+2}^3 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x \left(\sqrt[4]{x+2}^3 + \sqrt[4]{x+2}^2 \times \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{x+2} \times \sqrt[4]{3x+2}^2 + \sqrt[4]{3x+2}^3 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt[4]{x+2}^3 + \sqrt[4]{x+2}^2 \times \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{x+2} \times \sqrt[4]{3x+2}^2 + \sqrt[4]{3x+2}^3} \\
 &= \frac{-2}{\sqrt[4]{2}^3 + \sqrt[4]{2}^2 \times \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2}^2 + \sqrt[4]{2}^3} \\
 &= \frac{-2}{4 \times \sqrt[4]{2}^3}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-1 \times \sqrt[4]{2}}{2 \times \sqrt[4]{2}^3 \times \sqrt[4]{2}}$$

$$= \frac{-1 \times \sqrt[4]{2}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-\sqrt[4]{2}}{4}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+2} - \sqrt[4]{3x+2}}{x} = \frac{-\sqrt[4]{2}}{4}$

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}-1)(\sqrt[3]{x^3+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+1} + 1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt[3]{x^3+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt[3]{x^3+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3+1-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(x^2+1-1)(\sqrt[3]{x^3+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + 1} \right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^2} + \sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(x \times \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + 1} \right)}{x^2 \left(x^2 \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^2} + x \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} + 1 \right)} \left(\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^2} = x^2 \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x}} \right)}{x^2 \times x^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^2} + \frac{1}{x} \times \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{1} = 1 \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x} \times \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x^2} = 1 \right)$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = 1$

• لدينا : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt[4]{x^5 + 1}}{x + 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt[4]{x^5 + 1}}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt[4]{x^5 + 1} \times \sqrt[4]{x^5 + 1}^3}{(x + 1) \sqrt[4]{x + 1}^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^5 + 1}{(x + 1) \sqrt[4]{(x + 1)}^3} \quad ; \quad (x^5 + 1 = x^5 - (-1)^5) \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^5 - (-1)^5}{(x + 1) \sqrt[4]{(x + 1)}^3} \quad ; \quad (a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)) \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\cancel{(x+1)} (x^4 + x^3 \times (-1) + x^2 \times (-1)^2 + x \times (-1)^3 + (-1)^4)}{\cancel{(x+1)} \sqrt[4]{(x + 1)}^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{\sqrt[4]{(x + 1)}^3} \\ &= +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt[4]{(x + 1)}^3 = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 5 \right) \end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt[4]{x^5 + 1}}{x + 1} = +\infty$

13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x} & ; x < 0 \\ \frac{1}{1+\sqrt{x}} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

01. نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأول مبيانيات النتيجة .

لدينا :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 0 \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{x} = +\infty \right)$

• تأويل هندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي معادلته هي $y = 0$.

02. ندرس اتصال f في النقطة $x_0 = 0$.

• اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 = f(0)$ ؛ ومنه الدالة f متصلة على يمين $x_0 = 0$.

• اتصال الدالة f على يسار $x_0 = 0$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{1-x} = 1 = f(0)$ ؛ ومنه الدالة f متصلة على يسار $x_0 = 0$.

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

14.

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

01. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > -1$$

و هذا دائما صحيح لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ ومنه : f معرفة على $\mathbb{R}$.

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

02. ندرس زوجية الدالة f على D_f .

لدينا :

• لكل x من $\mathbb{R}$ كذلك $-x$ من $\mathbb{R}$.

• ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2+1}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$= -f(x)$$

و منه : $f(-x) = -f(x)$

خلاصة : الدالة f فردية على $D_f = \mathbb{R}$.

03. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} \left(\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \right)$$

خلاصة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• نحسب : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$. لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \times \frac{1}{\cancel{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

و منه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$

نلاحظ أن : $(f(0) = 0)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين النقطة $x_0 = 0$ و العدد المشتق على يمين

• نعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها النقطة $x_0 = 0$ هو $f'_d(0) = 1$.

و منه : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس في النقطة $x_0 = 0$ معاملته الموجه هو $m = f'_d(0) = 1$.

01. نعتبر المعادلة : $\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{x+2} + 3 = 0$: (E).

• نحدد مجموعة تعريف المعادلة (E) . لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة (E) $D_f = [-2; +\infty[$.

• نحل المعادلة (E) على $[-2; +\infty[$.

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)^2} - 4\sqrt[3]{x+2} + 3 = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)^2} - 4\sqrt[3]{x+2} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 4X + 3 = 0 \quad ; \quad (X = \sqrt[3]{(x+2)})$$

$$\Leftrightarrow X = 3 \text{ أو } X = 1$$

$$\Leftrightarrow X = \sqrt[3]{(x+2)} = 3 \text{ أو } X = \sqrt[3]{(x+2)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 3^3 \text{ أو } x+2 = 1^3$$

$$\Leftrightarrow x = 25 \in [-2; +\infty[\text{ أو } x = -1 \in [-2; +\infty[$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{-1; 25\}$.