



01.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستوى (P) المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية عليه و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $\sqrt{2}$.

01.

أ- نبين أن : $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

طريقة 1 :

بما أن : المستوى (P) المار من النقطة $A(0,1,1)$ و $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية عليه فإن :

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x \times 1 + (y-1) \times 0 + (z-1) \times (-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - z + 1 = 0$$

خلاصة: $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

طريقة 2 :

- المتجهة $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة منظمية ل (P) إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $1x + 0y - 1z + d = 0$.
- النقطة $A(0,1,1) \in (P)$ فإن : $1 \times 0 + 0 \times 1 - 1 + d = 0$ و منه : $d = 1$.

خلاصة: $x - z + 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) .

ب- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) و نتحقق بأن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس.

- نبين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

لهذا نحسب $d(\Omega, (P))$ المسافة بين النقطة Ω مركز الفلكة و المستوى (P) .

$$\text{لدينا : } d(\Omega, (P)) = \frac{|0+0+1+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ونعلم أن شعاع الفلكة (S) هو $r = \sqrt{2}$ و منه $d(\Omega, (P)) = r$.

خلاصة 1 : المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

- نتحقق بأن النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس.

لهذا نبين أن $B \in (S) \cap (P)$ أي نبين أن : $B \in (S)$ (أي $\Omega B = \sqrt{2}$) و نبين أن $B \in (P)$.

$$- \Omega B = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ و منه } B \in (S)$$

$$- \text{لدينا : } 1 \times (-1) + 0 \times 1 - 1 \times 0 + 1 = 0 \text{ إذن : } B \in (P)$$

و منه : $B \in (S) \cap (P)$.

خلاصة 2 : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة التماس.



02..

أ- نحدد تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P) .
✓ لدينا المتجهة: $\vec{u}(1,0,-1)$ موجهة ل (Δ) لأنها منظمية على المستوى (P) و $A(0,1,1) \in (\Delta)$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 0 + 1 \times t = t \\ y = 1 + 0 \times t = 1 \\ z = 1 - 1 \times t = 1 - t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R} \quad \text{هو } (\Delta) \text{ تمثيل بارامترى للمستقيم}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R} \quad \text{هو } (\Delta) \text{ تمثيل بارامترى للمستقيم} \quad \text{خلاصة:}$$

ب- نبين أن: المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$.
✓ نحدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) : $(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{2}^2 = 2$
✓ نحدد تقاطع الفلكة (S) و المستقيم (Δ) .
لدينا:

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) \cap (\Delta) &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in (S) \\ M \in (\Delta) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 - 2 = 0 \\ \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + (1-1)^2 + (1-t+1)^2 - 2 = 0 \\ \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 4t + 2 = 2(t-1)^2 = 0 \\ \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

و منه: المستقيم (Δ) و الفلكة (S) يتقاطعان في نقطة وحيدة هي $C(1,1,0)$.

خلاصة: المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$.



ملحوظة: هناك طريقة أخرى يمكن أن نحسب $d(\Omega, (\Delta))$ (مسافة المركز Ω عن المستقيم و ذلك بحساب $d(\Omega, (\Delta)) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$)

و نتحقق أن $d(\Omega, (\Delta)) = r = \sqrt{2}$ ثم نتحقق أن $C \in \Omega$ و $C \in (\Delta)$.

03. نبين أن : $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k}$

• لدينا : $\vec{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و منه $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 2\vec{k} = 2\vec{k}$

خلاصة: $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = 2\vec{k}$

• مساحة المثلث OCB :

لدينا : $S_{OBC} = \frac{1}{2} \times \|\vec{OC} \wedge \vec{OB}\| = \frac{1}{2} \times \|2\vec{k}\| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

و بالتالي : مساحة المثلث OBC هي $S_{OBC} = 1$ u.a (حسب وحدة المساحة)

02.

يحتوي صندوق: على 8 كرات أربع كرات تحمل رقم 2 وكرة واحدة تحمل رقم 1 و كرة واحدة تحمل رقم 4 ؛ لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس و نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

01. ليكن

✓ الحدث A : " من بين الكرات الثلاث المسحوبة لا توجد أية كرة تحمل العدد 0 "

✓ الحدث B : " جداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة يساوي 8 "

• نبين أن : $p(A) = \frac{5}{14}$

✓ عدد السحبات الممكنة (أي $\text{card}\Omega$) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 8 كرات يمثل تاليفة ل 3 من بين 8 . ومنه $\text{card}\Omega = C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$

إذن : $\text{card}\Omega = C_8^3 = 56$

✓ عدد السحبات التي نريد أن نتحقق (أي $\text{card}A$) :

الحدث A نعتبر عنه أيضا بما يلي : " الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل الأعداد ① أو ② أو ④ " و نعلم أن عدد هاته الكرات عددها هو 6 كرات .

إذن سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 6 كرات يمثل تاليفة ل 3 من بين 6 و منه $\text{card}A = C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$

ومنه : $\text{card}A = C_6^3 = 20$

ومنه : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{4 \times 5}{8 \times 7} = \frac{5}{14}$

خلاصة: $p(A) = \frac{5}{14}$

• نبين أن : $p(B) = \frac{1}{7}$

✓ عدد السحبات التي نريد أن نتحقق (أي $\text{card}B$) :



الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : A " (الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ②) أو (كرة تحمل العدد ① و كرة تحمل العدد ② و كرة تحمل العدد ④) " .
 ▪ الكرات الثلاث المسحوبة من بين الكرات التي تحمل العدد ② .
 أي سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 4 كرات (التي تحمل العدد ②) يمثل تآليفة ل 3 من بين 4 وهي تتم ب $C_4^3 = C_4^1 = 4$.

▪ كرة تحمل العدد ① و كرة تحمل العدد ② و كرة تحمل العدد ④ " وهي تتم ب $C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 1 \times 4 \times 1 = 4$.
 ▪ ومنه $\text{card}B = C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1 = 4 + 4 = 8$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{4 + 4}{8 \times 7} = \frac{8}{8 \times 7} = \frac{1}{7}$$

خلاصة : $p(B) = \frac{1}{7}$

01. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأعداد التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة .

أ- نبين أن : $p(X=16) = \frac{3}{28}$

✓ الحدث $(X=16)$ يمثل الحدث " الكرات الثلاث المسحوبة من بينها كرتين تحملان العدد ② و كرة واحدة تحمل رقم ④ "

▪ سحب كرتين تحملان العدد ② من بين 4 كرات وهي تتم ب $C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$.

▪ كرة واحدة تحمل رقم ④ من كرة واحدة وهي تتم ب $C_1^1 = 1$ (بكيفية واحدة فقط)

▪ ومنه : $\text{card}(X=16) = C_4^2 \times C_1^1 = 6$

$$p(X=16) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6}{8 \times 7} = \frac{3}{28}$$

خلاصة : $p(X=16) = \frac{3}{28}$

ب- نتم ملء الجدول مع التعليل .

▪ نلاحظ أن : الحدث $(X=8)$ يمثل الحدث B و منه : $p(X=8) = p(B) = \frac{1}{7}$

▪ الحدث $(X=4)$ يمثل الحدث " كرتين تحملان العدد ② و كرة تحمل العدد ① إذن $p(X=4) = \frac{C_4^2 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{6 \times 1}{8 \times 7} = \frac{3}{28}$

▪ الحدث $(X=0)$ يمثل الحدث " على الأقل كرة تحمل العدد ① " .

إذن الحدث المضاد ل $(X=0)$ هو الحدث A ومنه $(X=0) = \bar{A}$

$$p(X=0) = \frac{9}{14} \text{ إذن } p(X=0) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

و منه سيتم ملء الجدول كالتالي :

X_i	0	4	8	16	المجموع
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	1



نعتبر العددين العقديين a و b حيث $a = \sqrt{3} + i$ و $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$.

01..

أ- نتحقق أن : $b = (1+i)a$.

لدينا : $(1+i)a = (1+i)(\sqrt{3} + i)$

$$= \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} - 1$$

$$= \sqrt{3} - 1 + (1 + \sqrt{3})i$$

$$= b$$

خلاصة : $b = (1+i)a$

ب- نستنتج أن : $|b| = 2\sqrt{2}$ و أن $[2\pi]$ $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12}$.

▪ نستنتج أن : $|b| = 2\sqrt{2}$.

لدينا :

$$|b| = |(1+i)a|$$

$$= |1+i||a|$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2} \times \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{2} \times 2$$

$$= 2\sqrt{2}$$

ومنه : $|b| = 2\sqrt{2}$

▪ نستنتج أن : $[2\pi]$ $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12}$.

لدينا :

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] -$$

$$. a = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left[2, \frac{\pi}{6} \right] -$$

$$b = (1+i)a = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] \times \left[2, \frac{\pi}{6} \right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{12} \right] -$$

ملحوظة : وهذه الطريقة نحصل بها على كل من : معيار b أي $|b|$ و على عمدة b أي $\arg b$.

- **و بالتالي :** $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$



جـ نستنتج مما سبق أن : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

نعلم أن : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\operatorname{Re}(b)}{|b|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ($\operatorname{Re}(b)$ هو الجزء الحقيقي ل b)

و بالتالي : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

02 نعتبر ، في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(0, \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لحقهما على

التوالي هما a و b والنقطة C التي لحقها c حيث $c = -1 + i\sqrt{3}$

أـ نتحقق أن : $c = ia$ ونستنتج أن $OA = OC$ وأن $\angle(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

■ نتحقق أن : $c = ia$

لدينا : $ia = i(\sqrt{3} + i) = i\sqrt{3} - 1 = -1 + i\sqrt{3} = c$

ومنه : $c = ia$

■ نستنتج أن : $OA = OC$

لدينا :

$$c = ia \Rightarrow \frac{c}{a} = i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{c}{a} \right| = |i|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{c}{a} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|c-0|}{|a-0|} = \frac{OC}{OA} = 1$$

$$\Rightarrow OC = OA$$

ومنه : $OA = OC$

■ نستنتج أن : $\angle(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$c = ia \Rightarrow \frac{c}{a} = i \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \arg i [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \angle(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه : $\angle(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$



ب- نبين أن : النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

❖ طريقة 1 :

لدينا الكتابة العقدي للإزاحة هي : $z' = z + c$

نعتبر أن النقطة A' حيث لحقها a' هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

ومنه : $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = A' \Leftrightarrow a' = a + c$

(لأن $c = ia$) $\Leftrightarrow a' = a + ia$

$\Leftrightarrow a' = (1+i)a$

(لأن $b = (1+i)a$) $\Leftrightarrow a' = b$

($A' = B$ أي $a' = b$) $\Leftrightarrow A' = t_{\overrightarrow{OC}}(A) = B$

خلاصة : النقطة B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

❖ طريقة 2 :

نرمز للإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ ب $t_{\overrightarrow{OC}}$.

ومنه : B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ يعني أن : $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = B$ وهذا يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ أي نبين أن

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$ (لحقي المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو $Z_{\overrightarrow{OC}} = c - 0 = c$ و $\overrightarrow{AB}$ هو $Z_{\overrightarrow{AB}} = b - a$ متساويين) أي $b - a = c - 0 = c$

من جهة أخرى : $b - a = (1+i)a - a$ (لأن $b = (1+i)a$)

$= a + ia - a$

$= ia$

$= c$

(حسب السؤال 2 - أ)

ومنه : $b - a = c$ و بالتالي $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$ أي $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ ومنه : $t_{\overrightarrow{OC}}(A) = B$.

خلاصة : B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$.

ج- نستنتج أن الرباعي OABC مربع .

لدينا :

▪ B هي صورة النقطة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OC}$ إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ ومنه : الرباعي OABC متوازي الأضلاع .

▪ $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ إذن OABC متوازي الأضلاع له زاوية قائمة .

▪ $OA = OC$ إذن OABC متوازي الأضلاع له ضلعين متتبعين متقايسين .

ومنه : الرباعي OABC متوازي الأضلاع له زاوية قائمة و له ضلعين متتبعين متقايسين إذن الرباعي OABC مربع .

خلاصة : الرباعي OABC مربع .

04 .

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$.

I .

01 . نتحقق أن : $g(1) = 0$.

لدينا : $g(1) = 1^2 + 1 - 2 + 2\ln 1 = 2 - 2 + 2 \times 0 = 0$.

خلاصة : $g(1) = 0$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$



02. انطلاقا من الجدول تغيرات الدالة g جانبه :

✓ نبين أن : $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

من خلال الجدول الدالة g هي تزايدية على $]0,+\infty[$ و منه : g تزايدية على $]0,1]$ و منه : لكل $x \in]0,1]$ لدينا :

$$(x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1)) \quad (\text{لأن } g \text{ تزايدية على }]0,1])$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0 \quad (\text{لأن } g(1) = 0)$$

و منه : $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0,1]$.

✓ نبين أن : $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$.

من خلال الجدول الدالة g هي تزايدية على $]0,+\infty[$ و منه : g تزايدية على $[1,+\infty[$ و منه : لكل $x \in [1,+\infty[$ لدينا :

$$(x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)) \quad (\text{لأن } g \text{ تزايدية على } [1,+\infty[)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0 \quad (\text{لأن } g(1) = 0)$$

و منه : $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$.

و ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة 1 cm) .

01. نبين أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ و نؤول هندسيا النتيجة .

$$\blacksquare \text{ نبين أن : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

لدينا :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = +\infty \quad (\text{خاصية}) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \quad (\text{لأن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{2}{x} = -\infty)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = +\infty \quad \checkmark \text{ و منه :}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{خلاصة :}$$

■ نؤول هندسيا النتيجة .

بما أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$.

خلاصة : المنحنى (C) يقبل مقارب عمودي هو المستقيم الذي معادلته $x = 0$.

02.

أ- نبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا :



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = +\infty \text{ و منه (خاصية) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ و } \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1\right) \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = +\infty \text{ و منه } \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ : خلاصة}$$

ب- نبين أن : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجيميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.
لدينا :

$$\left(a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ أي } a \text{ و منه نحدد قيمة } a \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

▪ نحدد قيمة a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{\ln x}{x} = 1 \text{ : لدينا}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 \text{ و (خاصية) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right)$$

$$a = 1 \text{ : و منه}$$

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x \text{ أي } b \text{ نحدد قيمة } b \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = +\infty \text{ : لدينا}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{\ln x}{x} = +\infty \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 \text{ و (خاصية) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \right)$$

$$b = +\infty \text{ : و منه}$$

خلاصة : المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعاً شلجيميا في اتجاه المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

03

$$\text{أ-} \text{ نبين أن : } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \text{ لكل } x \text{ من }]0, +\infty[.$$

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع و جداء عدة دوال قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \left(x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x \right)' \text{ : لدينا}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ لأن } = 1 + \left(1 - \frac{2}{x}\right)' \ln x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$= 1 + \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2 \ln x + x - 2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2 + 2 \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

خلاصة: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ب- نبين أن: الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1]$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

لهذا ندرس إشارة $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ أي ندرس إشارة $g(x)$ فقط.

حسب ما سبق:

- $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0, 1]$ إذن $f'(x) \leq 0$ على المجال $]0, 1]$. و منه f تناقصية على المجال $]0, 1]$.
- $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1, +\infty[$ إذن $f'(x) \geq 0$ على المجال $[1, +\infty[$. و منه f تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

خلاصة: الدالة f تناقصية على المجال $]0, 1]$ و تزايدية على المجال $[1, +\infty[$.

ج- نضع جدول لتغيرات f على المجال $]0, +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(1) = 1$	$+\infty$

أ- نحل على المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$

لدينا:

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \text{ أو } 1 - \frac{2}{x} = 0)$$

$$\Leftrightarrow (\frac{2}{x} = 1 \text{ أو } \ln x = \ln 1)$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \in]0, +\infty[\text{ أو } x = 1 \in]0, +\infty[)$$

خلاصة: المعادلة $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$ لها حلين على $]0, +\infty[$ هما $x = 2$ أو $x = 1$.

ب- نستنتج أن: المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين يتم تحديد زوج إحداثيتي كل منهما.

ليكن x من $]0, +\infty[$.

$$M\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \in (C) \\ M\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \in (D) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = y = x$$

لهذا نحل المعادلة : $f(x) = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = x \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = 2 \quad (\text{حسب السؤال السابق})$$

إذن : بالنسبة ل $x = 1$ فإن $y = x = 1$ (لأن $f(x) = y = x$)

بالنسبة ل $x = 2$ فإن $y = x = 2$ (لأن $f(x) = y = x$)

خلاصة : المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين حيث زوج إحداثيتي كل منهما كالتالي (1;1) و (2;2).

جـ : بين أن : $f(x) \leq x$ لكل x من المجال $[1; 2]$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1; 2]$.

$$f(x) \leq x \Leftrightarrow x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x \leq x \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x}\right) \ln x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \ln x \leq 0 \quad ; \quad (x \in [1; 2])$$

نعلم أن $\ln x \geq 0$ على المجال $[1; +\infty[$ إذن إشارة $(x-2) \ln x$ هي إشارة $x-2$ على المجال $[1; 2]$

و منه الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1; 2]$ هو كالتالي :

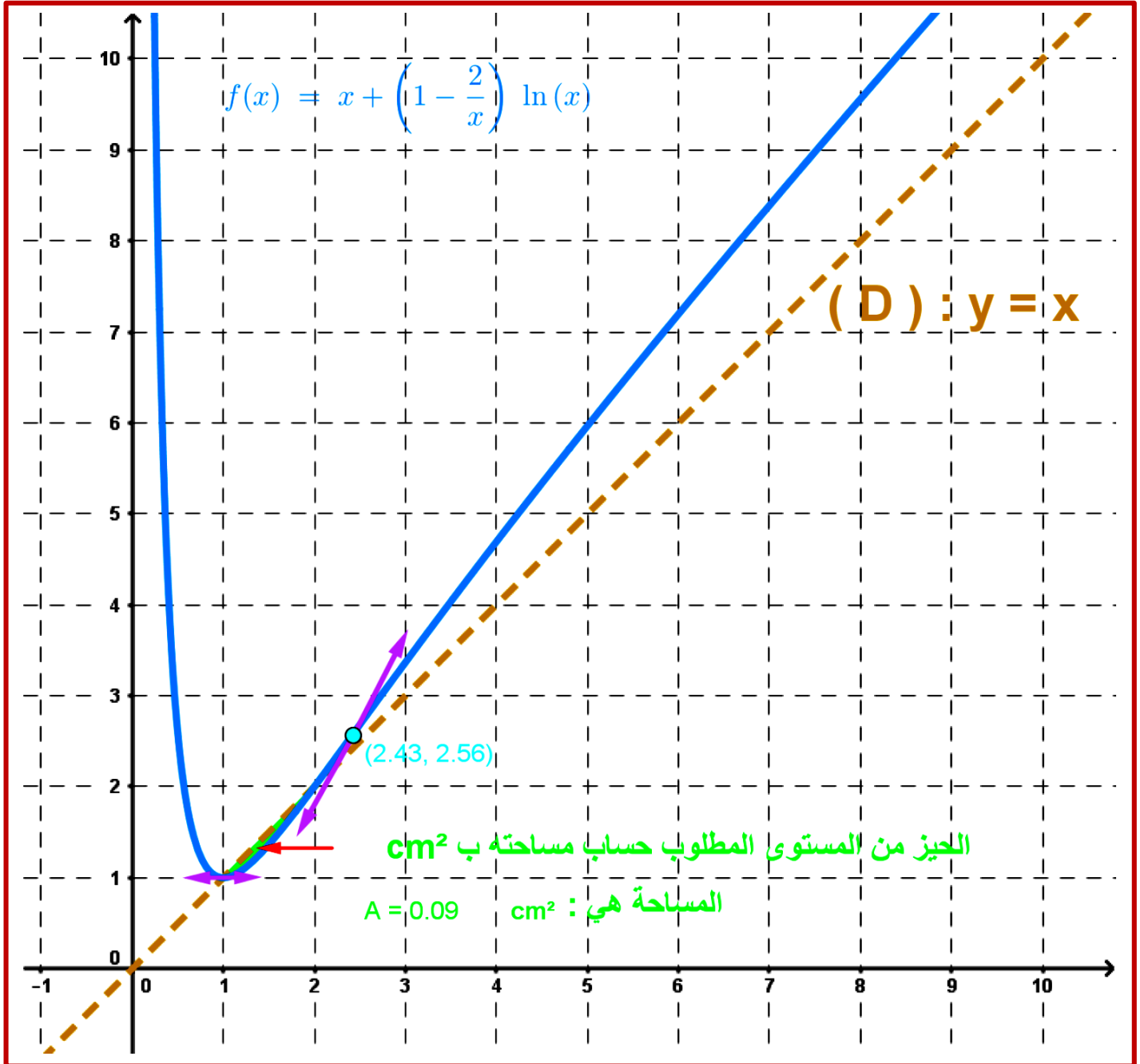
■ المنحنى (C) و المستقيم (D) يتقاطعان في نقطتين حيث زوج إحداثيتي كالتالي (1;1) و (2;2).

■ المنحنى (C) يوجد قطعا تحت المستقيم (D) على المجال $[1; 2]$.

خلاصة : الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D) على $[1; 2]$ بواسطة الجدول التالي :

X	1	2
$f(x) - x$	0	0
	(D) تحت (C)	
الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (D)	(D) و (C) يتقاطعان	(D) و (C) يتقاطعان

05. ننشئ المستقيم (D) و المنحنى (C) في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها محصور بين 2,4 و 2,5).



06

أ- نبين أن: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

لدينا: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 (\ln x)' \times \ln x dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} ((\ln 2)^2 - (\ln 1)^2) = \frac{1}{2} ((\ln 2)^2 - 0) = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

خلاصة: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

ب- نبين أن الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0, +\infty[$.

لهذا نبين أن : $H'(x) = h(x)$.

$$\text{لدينا : } H'(x) = (2\ln x - x)' = 2 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{2}{x} - 1 = h(x)$$

ومنه : $H'(x) = h(x)$

خلاصة : الدالة $H : x \mapsto 2\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0, +\infty[$.

ج- باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نبين أن : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$.

نضع :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \frac{2}{x} - 1 \quad v(x) = 2\ln x - x$$

ومنه :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx &= \left[\ln x (2\ln x - x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times (2\ln x - x) dx \\ &= \ln 2 (2\ln 2 - 2) - \ln 1 (2\ln 1 - 1) - \int_1^2 \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) dx \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left(2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^2 1 dx \right) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left(2 \times \frac{1}{2} (\ln 2)^2 - [x]_1^2 \right) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - \left((\ln 2)^2 - (2 - 1) \right) \\ &= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 \\ &= (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1 \\ &= (1 - \ln 2)^2 \end{aligned}$$

خلاصة : $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx = (1 - \ln 2)^2$

د- نحسب ب cm^2 مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

المساحة المطلوبة هي :

$$\left(\int_1^2 |f(x) - x| dx \right) \times \|i\| \times \|j\| = \left(\int_1^2 (x - f(x)) dx \right) \times \|i\| \times \|j\| \text{ cm}^2$$

$$\left(\int_1^2 |f(x) - x| dx \right) \times \|i\| \times \|j\| = \left(\int_1^2 (x - f(x)) dx \right) \times \|i\| \times \|j\| \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\int_1^2 \left(x - \left(x + \left(1 - \frac{2}{x} \right) \ln x \right) \right) dx \right) \times 1 \times 1 \text{ cm}^2 \\
 &= \int_1^2 - \left(1 - \frac{2}{x} \right) \ln x dx \text{ cm}^2 \\
 &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x dx \text{ cm}^2 \\
 &= (1 - \ln 2)^2 \text{ cm}^2 \quad (\text{حسب السؤال السابق})
 \end{aligned}$$

خلاصة : مساحة حيز من المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=2$ هي $(1 - \ln 2)^2 \text{ cm}^2$.

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = \sqrt{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

01. نبين بالترجع أن : $1 \leq u_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $1 \leq u_0 = \sqrt{3} \leq 2$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة n : أي $1 \leq u_n \leq 2$ (معطيات الترجع).

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$: أي نبين أن : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

حسب معطيات الترجع لدينا : $1 \leq u_n \leq 2$

و منه : $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ (لأن f تزايدية على $[1;2]$ و $1 \leq u_n \leq 2$)

$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$ (لأن $f(1) \leq 1$ و $f(2) \leq 2$ و ذلك $(f(x) \leq x ; x \in [1;2])$)

أو أيضا $f(1)=1$ و $f(2)=2$ لأن (C) و (D) يتقطعان في نقطتين

حيث : زوج إحداثيتي كالتالي (1;1) و (2;2).

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $1 \leq u_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

02. نبين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II (4 ج -)

لهذا نبين أن : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع $u_n = x$.

• و نعلم أن $1 \leq u_n \leq 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ إذن $x = u_n \in [1;2]$ (لكل n من $\mathbb{N}$)

• ولدينا : $f(x) \leq x$ لكل x من $[1;2]$ (حسب II (4 ج -) و منه : $f(u_n) \leq u_n$ (لكل n من $\mathbb{N}$)

إذن : $u_{n+1} \leq u_n$ (لأن $u_{n+1} = f(u_n)$) و ذلك لكل n من $\mathbb{N}$.

و بالتالي : لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1} \leq u_n$ (أو أيضا $u_{n+1} - u_n \leq 0$)

خلاصة : المتتالية (u_n) تناقصية.

03. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

❖ نستنتج أن : المتتالية (u_n) متقاربة

• لدينا المتتالية (u_n) تناقصية و مصغرة (لأن $1 \leq u_n \leq 2$) و منه : المتتالية (u_n) متقاربة مع نهايتها l مع $l \in \mathbb{R}$

خلاصة : (u_n) متقاربة

❖ نحدد نهاية المتتالية (u_n)

• المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$

• الدالة f متصلة على $I = [1; 2]$

• $f(I) \subset I = [1; 2]$ لأن :

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$(f(x) \leq x ; x \in [1; 2]) \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 2$$

• بما أن (u_n) متقاربة إذن نهايتها l هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in [1; 2]$ (حسب خاصية) .

أي $f(x) - x = 0$; $x \in [1; 2]$ و هذه المعادلة لها حلين هما 1 و 2 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية إذن

$u_0 = \sqrt{3} \geq u_n$ و منه $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \dots \dots \geq u_n$ أي $u_0 = \sqrt{3} < 2$ و منه $u_n < 2$ و منه الحل المقبول هو $l = 1$.

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$