

التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

(1) أ. لنبين بالترجع أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n = 0$:

$$u_0 = 2 \text{ لدينا}$$

$$u_0 > 1 \text{ إذن}$$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

• نفترض أن : $u_n > 1$

• و نبين أن : $u_{n+1} > 1$

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$

$$\text{إذن } \frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16}$$

$$\text{إذن } \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16}$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} > 1$$

✓ نستنتج أن : $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n$$

$$= \left(\frac{1}{16} - 1 \right) u_n + \frac{15}{16}$$

$$= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16}$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

❖ لدينا حسب نتيجة السؤال (1) أ. $u_n > 1$

$$\text{إذن } u_n - 1 > 0$$

$$\text{إذن } \frac{-15}{16}(u_n - 1) < 0$$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

ج. بما أن (u_n) تناقصية و مصفورة (بالعدد 1) فإن (u_n) متقاربة

(2)

أ.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\&= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 \\&= \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} \\&= \frac{1}{16}(u_n - 1) \\&= \frac{1}{16}v_n\end{aligned}$$

إذن $v_{n+1} = \frac{1}{16}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{16}$

و حدها الأول $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

❖ لنكتب v_n بدلالة n :

$$v_n = 1 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n \quad \text{إذن} \quad v_n = v_0 \times q^n$$

و منه $v_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب.

❖ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا $v_n = u_n - 1$ إذن $u_n = v_n + 1$

و منه $u_n = \left(\frac{1}{16}\right)^n + 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

❖ بما أن $-1 < \frac{1}{16} < 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$

و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

تصحيح التمرين الثاني :

1. أ. لدينا : $\overrightarrow{OA}(1,3,4)$ و $\overrightarrow{OB}(0,1,2)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{إذن :}$$

ب. لدينا : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(2,-2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $2x - 2y + 1z + d = 0$

و بما أن : $O(0,0,0) \in (OAB)$ فإن : $2 \cdot (0) - 2 \cdot (0) + 1 \cdot (0) + d = 0$

إذن : $d = 0$

و بالتالي معادلة للمستوى (OAB) هي : $2x - 2y + z = 0$

2. لتكن الفلكة (S) التي معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 6y + z^2 - 6z = -2 \quad \text{تكافئ :}$$

تكافئ :

$$x^2 - 2(3)x + (3)^2 + y^2 - 2(-3)y + (-3)^2 + z^2 - 2(3)z + (3)^2 = -2 + (3)^2 + (3)^2 + (3)^2$$

$$(x - (3))^2 + (y - (-3))^2 + (z - (3))^2 = 25 = (5)^2 \quad \text{تكافئ :}$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(3, -3, 3)$ و شعاعها $R = 5$

$$3 \quad \text{أ. لدينا :} \quad d(\Omega, (OAB)) = \frac{|2(3) - 2(-3) + (3)|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} = \frac{15}{3} = 5$$

بما أن : $d(\Omega, (OAB)) = R$ فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S)

ب. لنحدد $H(x_H, y_H, z_H)$ نقطة تماس المستوى (OAB) و الفلكة (S)

لدينا $H(x_H, y_H, z_H)$ هي المسقط العمودي للنقطة $\Omega(3, -3, 3)$ على المستوى (OAB)

و بالتالي $H(x_H, y_H, z_H)$ هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من $\Omega(3, -3, 3)$

و العمودي على المستوى (OAB) مع المستوى (OAB) .

لدينا $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(2, -2, 1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB) و بما أن $(\Delta) \perp (OAB)$

فإن : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(2, -2, 1)$ هي متجهة موجهة للمستوى (OAB) . و لدينا $\Omega(3, -3, 3) \in (\Delta)$

$$(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{إذن تمثيل بارامترى للمستقيم } (\Delta)$$

$$(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x_H = 3 + 2t \\ y_H = -3 - 2t \\ z_H = 3 + t \\ 2x_H - 2y_H + z_H = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ } H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (OAB)$$

$$2(3 + 2t) - 2(-3 - 2t) + (3 + t) = 0 \quad \text{بالتعويض نجد :}$$

$$t = -1 \quad \text{ومنه :}$$

$$H(1, -1, 2) : \text{أي } \begin{cases} x_H = 3 + 2(-1) = 1 \\ y_H = -3 - 2(-1) = -1 \\ z_H = 3 + (-1) = 2 \end{cases} \quad \text{و بالتالي :}$$

تصحيح التمرين الثالث :

$$(1) \quad \text{لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } z^2 - 8z + 41 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(41) = -100 \quad \text{لدينا :}$$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقددين مترافقين

$$z = \frac{-(-8) + i\sqrt{100}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(-8) - i\sqrt{100}}{2(1)}$$

$$z = 4 - 5i \quad \text{أو} \quad z = 4 + 5i$$

$$S = \{4 - 5i, 4 + 5i\} \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \quad \text{أ. لدينا :} \quad \frac{c-b}{a-b} = \frac{(6+7i)-(3+4i)}{(4+5i)-(3+4i)} = \frac{3+3i}{1+i} = \frac{3(1+i)}{1+i} = 3$$

$$\text{بما أن } \frac{c-b}{a-b} \in \mathbb{R} \text{ فإن النقط } A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة.}$$

$$\text{ب. } R \text{ الدوران الذي مركزه } \Omega(\omega) \text{ و زاويته } \frac{-\pi}{2}$$

$$M'(z') \text{ صورة } M(z) \text{ بالدوران } R$$

$$\text{لدينا : } z' - \omega = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}(z - \omega)$$

$$\text{إذن : } z' - (4 + 7i) = -i(z - (4 + 7i))$$

$$\text{إذن : } z' - 4 - 7i = -i(z - 4 - 7i)$$

$$\text{إذن : } z' = -i(z - 4 - 7i) + 4 + 7i$$

$$\text{إذن : } z' = -iz + 4i - 7 + 4 + 7i$$

$$\text{ومنه : } z' = -iz - 3 + 11i$$

ج.

❖ لنحدد صورة النقطة C بالدوران R :

$$\text{لدينا : } -ic - 3 + 11i = -i(6 + 7i) - 3 + 11i = -6i + 7 - 3 + 11i = 4 + 5i = a$$

إذن : A هي صورة C بالدوران R .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega A = \Omega C \\ \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن : } R(C) = A \text{ لدينا : } \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Omega A}{\Omega C} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{a - \omega}{c - \omega} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{a - \omega}{c - \omega} \right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

$$\text{ومنه : } \frac{a - \omega}{c - \omega} = 1 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right)$$

تصحيح التمرين الرابع :

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{لدينا : } \text{card } \Omega = A_{10}^2 = 90$$

(1) " الحصول على كرتين تحملان عددين زوجيين "

$$\text{لدينا : } \text{card } A = A_6^2 = 30$$

$$\text{إذن : } p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{30}{90}$$

ومنه : $p(A) = \frac{1}{3}$

(2) لدينا : X متغير عشوائي حدائي وسيطاه $n=3$ و $p = p(A) = \frac{1}{3}$

$$p(X=1) = C_3^1 p^1 (1-p)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X=0) = C_3^0 p^0 (1-p)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$p(X=1) = \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$$

$$p(X=2) = C_3^2 p^2 (1-p)^{3-2} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1 = \frac{2}{9} = \frac{6}{27}$$

$$p(X=3) = C_3^3 p^3 (1-p)^{3-3} = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$	$\frac{2}{9} = \frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

تصحيح المسألة :

I.

$$g(1) = \frac{2}{1} - 1 + 2 \ln(1) = 2 - 1 + (2 \times 0) = 1 \quad (1)$$

(2) لدينا $g(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة g على $]0, +\infty[$

إن : $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) \geq g(1)$

إن : $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) \geq 1$

ومنه : $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

II.

(1) لدينا : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 - 3x + 2(x+1) \ln(x) = -\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 - 3x = 3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2(x + 1) = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 0$

(2) أ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - 3x + 2(x + 1) \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(\frac{x + 1}{x} \right) \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - 3 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

ب. لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} - 3 + 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \ln x = +\infty \quad \text{و}$$

إذن : (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

(3) أ. ليكن $x \in]0, +\infty[$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (3 - 3x + 2(x+1)\ln(x))' \\
 &= -3 + 2((x+1)'\ln(x) + (x+1)\ln'(x)) \\
 &= -3 + 2\left(\ln(x) + (x+1) \times \frac{1}{x}\right) \\
 &= -3 + 2\left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right) \\
 &= -3 + 2\left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right) \\
 &= -3 + 2\ln x + 2 + \frac{2}{x} \\
 &= \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x
 \end{aligned}$$

إن : لكل x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x)$

ت. حسب I. 2) لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) > 0$

و منه : $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) > 0$

و بالتالي f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(4) أ. ليكن $x \in]0, +\infty[$:

لدينا f' قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}f''(x) &= (f')'(x) \\&= g'(x) \\&= \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x} \\&= \frac{-2+2x}{x^2} \\&= \frac{2(x-1)}{x^2}\end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x - 1$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

لدينا : f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 1 إذن النقطة $I(1,0)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C) .

(لاحظ $f(1) = 0$)

ب. معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $I(1,0)$:

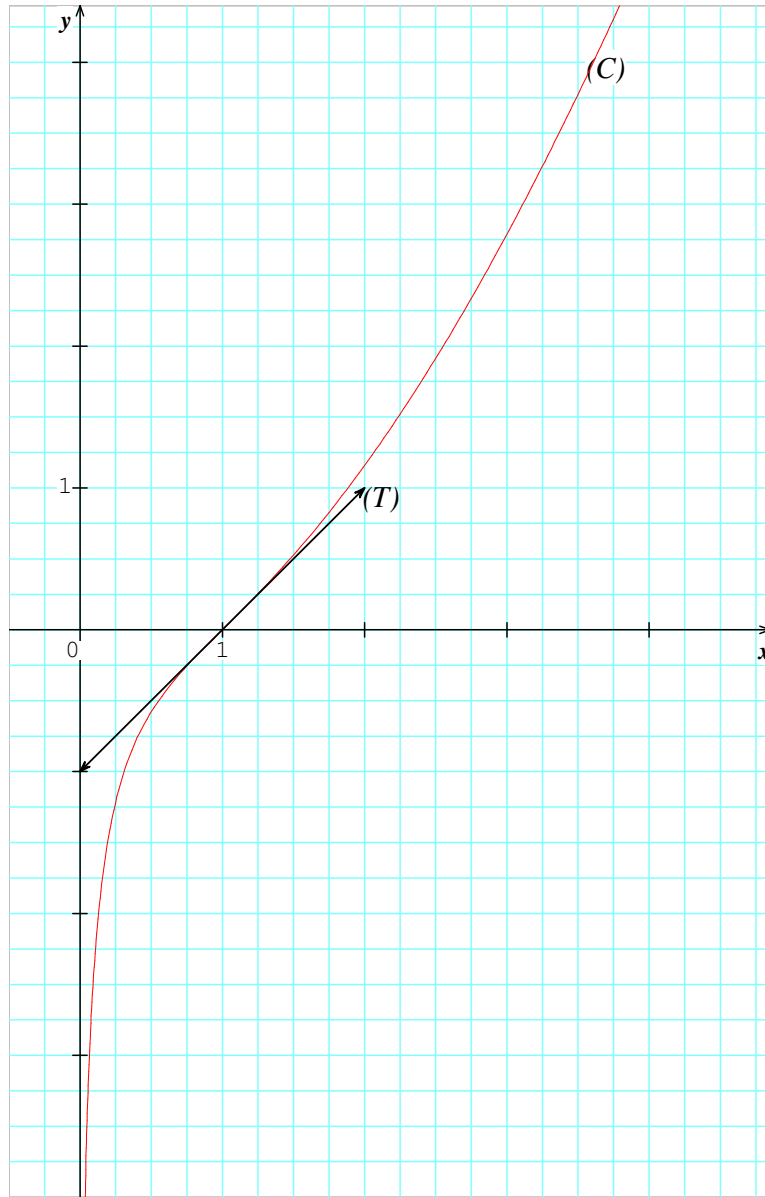
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

لدينا : $f'(1) = g(1) = 1$ و $f(1) = 0$

$$\text{إذن : } y = 1 \times (x-1) + 0$$

ومنه : $(T) : y = x - 1$

ج. إنشاء (C) :



5 أ.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx &= \left[x + \frac{x^2}{4} \right]_1^2 \\ &= \left(2 + \frac{2^2}{4}\right) - \left(1 + \frac{1^2}{4}\right) \\ &= 3 - \frac{5}{4} \\ &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} u'(x) = x + 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \quad \nearrow \quad \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} + x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{ب.}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x+1) \ln(x) dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2} + x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \times \frac{1}{x} dx \\ &= (4 \ln 2) - \left(\frac{3}{2} \ln 1 \right) - \int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2} \right) dx \\ &= 4 \ln(2) - \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad \text{ج. لدينا :}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \text{على المجال } [1, 2] \quad \text{لدينا :}$$

$$A = \int_1^2 f(x) dx \times 2cm \times 2cm \quad \text{إذن :}$$

$$A = \int_1^2 (3 - 3x + 2(x+1) \ln(x)) dx \times 4cm^2 \quad \text{إذن :}$$

$$A = \left(\int_1^2 (3 - 3x) dx + 2 \int_1^2 (x+1) \ln(x) dx \right) \times 4cm^2 \quad \text{إذن :}$$

$$A = \left(\left[3x - \frac{3x^2}{2} \right]_1^2 + 2 \left(4 \ln(2) - \frac{7}{4} \right) \right) \times 4cm^2 \quad \text{إذن :}$$

$$A = \left((0) - \left(\frac{3}{2} \right) + 8 \ln(2) - \frac{7}{2} \right) \times 4 \text{ cm}^2 \quad \text{إذن :}$$

$$A = (-5 + 8 \ln(2)) \times 4 \text{ cm}^2 \quad \text{إذن :}$$

$$A = (-20 + 32 \ln(2)) \text{ cm}^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$(6) \quad \text{لنحل مبيانيا : } (x+1) \ln(x) \geq \frac{3}{2}(x-1) \quad x \in]0, +\infty[$$

$$(x+1) \ln(x) \geq \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2(x+1) \ln(x) \geq 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1) \ln x \geq 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3x + 2(x+1) \ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

مبيانيا $f(x) \geq 0$ تعني أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل

$$\text{و بالتالي : } S = [1, +\infty[$$