

1- لنبين بالترجع أن: $U_n < 5$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=4$ و $4 < 5$

إذن: $U_n < 5$

نفترض أن $U_n < 5$ ولنبين أن: $U_{n+1} < 5$

لدينا: $U_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}U_n + 3 - 5$

$$= \frac{2}{5}U_n - 2$$

$$= \frac{2}{5}(U_n - 5)$$

وبما أن $U_n - 5 < 0$ فإن $U_n < 5$

ومنه $U_{n+1} - 5 < 0$ أي $U_{n+1} < 5$

وبالتالي: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n < 5$

2- * التحقق من المتساوية:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} - U_n = \frac{2}{5}U_n + 3 - U_n$$

$$= \left(\frac{2}{5} - 1\right)U_n + 3$$

$$= -\frac{3}{5}U_n + 3$$

$$= \frac{3}{5}(5 - U_n)$$

* استنتاج:

نعلم أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n < 5$

ومنه: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 5 - U_n > 0$

إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} - U_n > 0$

وهذا يعني أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية قطعاً.

3- بما أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية ومكبورة بالعدد 5، فإنها

متقاربة.

4- أ- * لنبين أن $(V_n)_n$ هندسية

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_{n+1} = 5 - U_{n+1}$$

$$= 5 - \frac{2}{5}U_n - 3$$

$$= 2 - \frac{2}{5}U_n$$

$$= \frac{2}{5}(5 - U_n)$$

$$V_{n+1} = \frac{2}{5}V_n$$

ومنه المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ وحدها الأول:

$$V_0 = 5 - U_0 = 5 - 4 = 1$$

* V_n بدلالة n :

بما أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية فإن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = V_0 \cdot q^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = 1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

ب- استنتاج:

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = 5 - U_n$

ومنه: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

نهاية $(U_n)_n$:

لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

وبما أن: $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

$$-1 < \frac{2}{5} < 1$$

$$\lim U_n = 5$$

تمرين رقم 2

1- لدينا: معادلة (S) هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$$

ومنه:

$$(x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-1)^2 - 1 - 7 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

ومنه مركز (S) هو النقطة $\Omega(-1, 0, 1)$ و شعاعها هو

$$R=3$$

$$\begin{cases} x_H = -1 + 2 = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{إذن :} \\ H(1, 0, 0) \quad \text{أي :}$$

تمرين رقم 3

1- أ- حل المعادلة : $z^2 - 8z + 32 = 0$

لدينا : $\Delta = 64 - 128 = -64$

ومنه : $z_1 = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i$

و $z_2 = \bar{z}_1 = 4 - 4i$

ومنه : $S = \{4 - 4i, 4 + 4i\}$

ب- * لدينا : $a = 4 + 4i$

ومنه : $|a| = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

إذن : $a = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$a = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

إذن : $a = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$

* استنتاج : $a^{12} = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]^{12}$

$= \left[(4\sqrt{2})^{12}; 12 \frac{\pi}{4} \right]$

$= [2^{30}; 3\pi] = [2^{30}; 3]$

$= 2^{30} (\cos \pi + i \sin \pi)$

$= -2^{30}$

إذن : $a^{12} \in \mathbb{R}^-$

2- أ- لدينا :

$M' = R(M) \Leftrightarrow z' - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - c)$

$\Leftrightarrow z' - c = i(z - c)$

$\Leftrightarrow z' = iz - ic + c$

$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)c$

$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)(3 + 4i)$

$\Leftrightarrow z' = iz + 3 + 4i - 3i + 4$

$\Leftrightarrow z' = iz + 7 + i$

2- أ- حساب المسافة $d(\Omega, (P)) = \frac{|2x_\Omega - z_\Omega - 2|}{\sqrt{4 + 1}}$
 $= \frac{|-2 - 1 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 ب- استنتاج :

لدينا : $d(\Omega, (P)) = \sqrt{5}$ و $R = 3$

وبما أن : $\sqrt{5} < 3$ (لأن $5 < 9$)

فإن : $d(\Omega, (P)) < R$

ومنه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)

3- ليكن r شعاع الدائرة (Γ)

نعلم أن : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega, (P))^2}$

فإن : $r = \sqrt{9 - 5} = 2$

* إحداثيات H مركز الدائرة (Γ)

لدينا H هي تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ) المار من

Ω والعمودي على المستوى (P) (لأن H هي المسقط العمودي

ل Ω على (P))

لدينا $(\Delta) \perp (P)$ إذن (Δ) موجه بالمتجه $\vec{n}_P(2, 0, -1)$

المنظمية على (P)

ومنه تمثيل بارامترى لـ (Δ) هو النظمة

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 0 \\ z = 1 - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$H \in (P) \Leftrightarrow 2x_H - z_H - 2 = 0 \quad (1)$

$H \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1 + 2k \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 - k \end{cases}$
 نعوض x_H و y_H و z_H في (1) نجد :

$-2(1 + 2k) - (1 - k) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -2 + 4k - 1 + k - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5k = 5$

$\Leftrightarrow k = 1$

إذن المجموعة المطلوبة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته هي :

$$x - y + 1 = 0$$

وبما أن $B \in (\Delta)$ و $C \in (\Delta)$

(نتحقق من ذلك بالإحداثيات)

فإن : $(\Delta) = (BC)$

تمرين رقم 4

ليكن Ω كون الإمكانات

بما أن السحب بتتابع وبإحلال

فإن كل سحبة هي ترتيبية بتكرار .

ومنه : $Card\Omega = 5^3 = 125$

1- احتمال الحدث A :

لدينا : $A = \{BBB; VVV; RRR\}$

ومنه : $CardA = 2^3 + 2^3 + 1^3$

$= 17$

إذن :

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{17}{125}$$

2- * قيم X :

نوع السحبات	قيمة X
$\overline{B} \overline{B} \overline{B}$	0
$\overline{B} \overline{B} B$	1
$\overline{B} B B$	2
$B B B$	3

ومنه $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

* قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{3^3}{125} = \frac{27}{125}$$

$$p(X = 1) = \frac{3 \cdot 2^1 \cdot 3^2}{125} = \frac{54}{125}$$

$$p(X = 2) = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot 3^1}{125} = \frac{36}{125}$$

$$p(X = 3) = \frac{2^3}{125} = \frac{8}{125}$$

نتحقق بسرعة أن :

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

ب- لدينا D صورة A بالدوران R

إذن : $D = R(A) \Leftrightarrow d = ia + 7 + i$

$$\Leftrightarrow d = i(4 + 4i) + 7 + i$$

$$\Leftrightarrow d = 4i - 4 + 7 + i$$

$$\Leftrightarrow d = 3 + 5i$$

ج- طريقة (1) :

$$|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$$

$$\Leftrightarrow |z - (3 + 5i)| = |z - (4 + 4i)|$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_A|$$

$$\Leftrightarrow DM = AM$$

إذن المجموعة المطلوبة هي واسط القطعة $[AD]$

بما أن المثلث ACD قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C

(لأن $R(A) = D$)

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر من C

وبما أن : $AB = |b - a| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$$DB = |b - d| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$$

$$AB = DB \quad \text{أي :}$$

فإن واسط القطعة $[AD]$ يمر أيضا من B .

إذن واسط القطعة $[AD]$ هو المستقيم (BC) .

طريقة (2) :

نضع : $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}) \quad z = x + iy$

ومنه : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$

$$\Leftrightarrow |x + iy - 3 - 5i| = |x + iy - 4 - 4i|$$

$$\Leftrightarrow |(x - 3) + i(y - 5)| = |(x - 4) + i(y - 4)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 4)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 - 10y + 25 = -8x + 16 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

تمرين رقم 5

$$\forall x \in]0, +\infty[;$$

لدينا :

$$f'(x) = \left(3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}\right)'$$

$$= \frac{2x}{x^4} - 2\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2}{x^3} - 2\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

$$= \frac{2}{x^3}(1 - x + x \ln x)$$

$$= \frac{2}{x^3} g(x)$$

$$f'(1) = \frac{2}{1^3} \cdot g(1) = 0 \quad \text{ب-}$$

ومنه (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة التي أفصولها 1.

$$\text{ج- لدينا : } \forall x \in]0; +\infty[; f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

$$g(x) \geq 0 \quad \text{و} \quad \frac{2}{x^3} > 0 \quad \text{وبما أن}$$

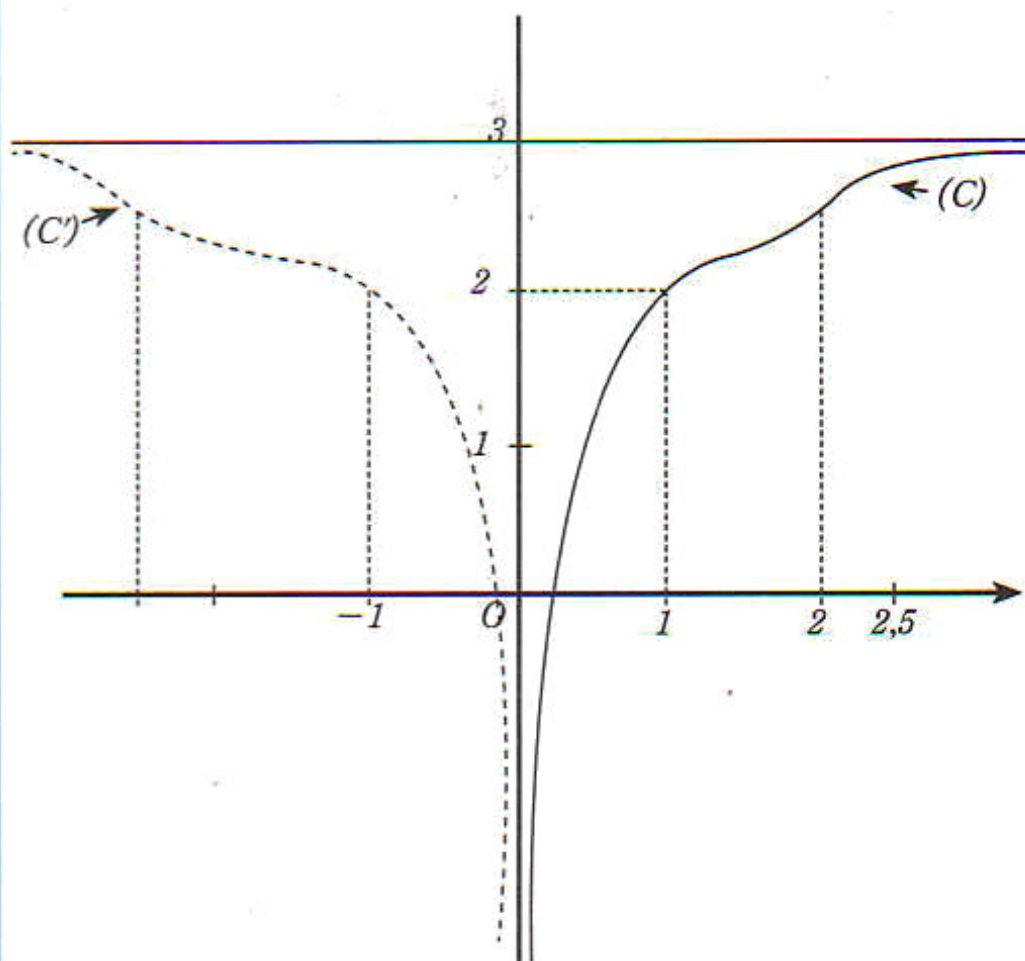
لكل x من المجال $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[; f'(x) \geq 0 \quad \text{فإن}$$

إذن f تزايدية على $]0; +\infty[$

4- إنشاء (C) : - جدول تغيرات f هو :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3



- I

$$\forall x \in]0, +\infty[; g'(x) = (1 - x + x \ln x)'$$

$$g'(x) = -1 + (1 + \ln x)$$

$$= \ln x$$

ب- إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln x$

$$\forall x \in]0, 1] ; \ln(x) \leq 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\forall x \in]0, 1] ; g'(x) \leq 0 \quad \text{فإن :}$$

إذن g تناقصية على المجال $]0, 1]$

$$\forall x \in [1, +\infty[; \ln(x) \geq 0 \quad \text{وبما أن}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[; g'(x) \geq 0 \quad \text{فإن :}$$

إذن g تزايدية على المجال $[1; +\infty[$

$$g(1) = 1 - 1 + 1 \ln 1 = 0 \quad \text{* - 2}$$

* لدينا g تقبل قيمة دنيا هي $g(1)$ على $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0, +\infty[; g(x) \geq g(1) \quad \text{إذن}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[; g(x) \geq 0 \quad \text{ومنه}$$

- II

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} \quad \text{* - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \frac{1}{x^2}(1 + 2x \ln x)$$

$$= -\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty \quad \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2x \ln x = 1 \quad \text{و} \end{array} \right)$$

* هندسيا :

(C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

$$\text{2- لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = 3$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{array} \right) \quad \text{لأن :}$$

هندسيا (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$

3- أ- لنبين أن :

$$\forall x \in]0; +\infty[; f(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$$

5-أ- لنبين أن

$$\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{2 \ln(x)}{x} dx &= 2 \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx \\ &= 2 \ln'(x) \cdot (\ln x)^1 dx \\ &= [\ln^2(x)]_1^e \\ &= \ln^2(e) - \ln^2(1) = 1 \end{aligned}$$

ب- المساحة المطلوبة هي :

$$A = \int_1^e |f(x)| dx \text{ (ua)}$$

$$\forall x \in [1, e] ; f(x) > 0$$

وبما أن

$$A = \int_1^e f(x) dx \text{ (ua)}$$

فإن :

$$= \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx \text{ (ua)}$$

$$= \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} \right) dx - \int_1^e \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) dx \right) \text{ (ua)}$$

$$A = \left(\left[3x + \frac{1}{x} \right]_1^e - 2 \right) \text{ (ua)}$$

$$= \left(3e + \frac{1}{e} - 4 - 2 \right) \text{ (ua)}$$

$$= \left(\frac{3e^2 + 1 - 6e}{e} \right) cm^2$$

6-أ- لنبين أن الدالة h زوجية .

لدينا : لكل من IR^* , $-x$ ينتمي إلى IR^*

$$h(-x) = 3 - \frac{1}{(-x)^2} - \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|} \text{ ولدينا :}$$

$$= 3 - \frac{1}{-x^2} - \frac{\ln x^2}{|x|}$$

$$= h(x)$$

ومنه المطلوب .

* لكل x من IR^{*+} لدينا $|x| = x$

$$\ln(x^2) = 2 \ln x \text{ و}$$

$$h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x} \text{ إذن}$$

$$= f(x)$$

ب- إنشاء (C') منحنى h

$$\forall x \in]0, +\infty[; h(x) = f(x) \text{ لدينا :}$$

ومن (C') هو (C) على المجال $]0, +\infty[$

و h زوجية ، إذن (C') متماثل بالنسبة لمحور الأرتيب .

إنشاء (C') انظر الشكل .