أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-1;1;0) \\ B(1;0;1) \\ O(0;0;0) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{OA}(-1;1;0) \\ \overrightarrow{OB}(1;0;1) \end{cases}$

و منه :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستوى (OAB) .

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متجهة منظمية على المستوى (OAB) .

إذن فهي عمودية على جميع متجهات المستوى (OAB)

إذن المتجهتان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ متعامدتان

يعني ، باستعمال الجداء السلمي : $\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0$

أي : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ يعني : $x + y - z = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة تميز نقط المستوى (OAB)

إذن فهي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

1 ب

لدينا $\Omega(1;1;-1)$ و $(OAB) : x + y - z = 0$

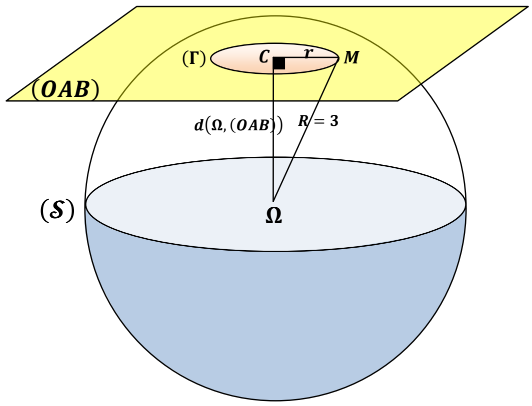
إذن : $d(\Omega, (OAB)) = \dfrac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

و نعلم أن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها Ω و شعاعها $R = 3$.

نلاحظ إذن أن : $\sqrt{3} < 3$ يعني : $d(\Omega, (OAB)) < Rayon(\mathcal{S})$

إذن المستوى (OAB) يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها $C(\alpha;\beta;\gamma)$ و شعاعها r .

لتحديد قيمة الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



من خلال هذا الشكل نلاحظ أن : $(\Omega C) \perp (OAB)$ إذن : $(\Omega C) \perp (CM)$

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم الزاوية في C في ΩCM

إذن : $\Omega M^2 = \Omega C^2 + CM^2$

يعني : $3^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2$ يعني : $r = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$

2 أ

ليكن (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على المستوى (OAB) .

و لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (Δ) .

بما أن (Δ) عمودي على (OAB) و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ منظمية على (OAB)

فإن أي متجهة موجهة لـ (Δ) تكون مستقيمية مع المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

لدينا $\overrightarrow{\Omega M}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) .

إذن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M} = t(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

أي : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(\exists t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = t \\ z + 1 = -t \end{cases}$; $(t \epsilon \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases}$; $(t \epsilon \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

2 ب

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (OAB) فإن (Δ) و (ΩC) منطبقان

يعني : $C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (\Delta)$

و لدينا من جهة ثانية : $C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (OAB)$

نحصل إذن على النظمة التالية : $\begin{cases} C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (\Delta) \\ C(\alpha;\beta;\gamma) \epsilon (OAB) \end{cases}$

و نعلم أن : $\begin{cases} (\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; (t \epsilon \mathbb{R}) \\ (OAB) : x + y - z = 0 \end{cases}$

إذن نعوض x و y و z بالمجاهيل α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 + t \\ \beta = 1 + t \\ \gamma = -1 - t \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$

نعوض بعد ذلك α و β و γ بالتعابير التي تضم البارامتر t في آخر معادلة

نجد : $(1 + t) + (1 + t) - (-1 - t) = 0$

و نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نجد :

$3t + 3 = 0$ أي : $t = -1$

نعوض t بالقيمة -1 في تعابير α و β و γ نجد : $\begin{cases} \alpha = 1 - 1 = 0 \\ \beta = 1 - 1 = 0 \\ \gamma = -1 + 1 = 0 \end{cases}$

إذن النقطة C التي نبحث عنها ما هي إلا O أصل المعلم .

و بالتالي (Γ) دائرة مركزها O أصل المعلم .

التمرين الثاني

1 أ

$$(1 + i)(-3 + 6i) = -3 + 6i - 3i - 6 = -9 + 3i$$

الهدف من هذه المتساوية هو توظيفها أثناء حساب $\dfrac{c - a}{b - a}$

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{(-2 + 5i) - (7 + 2i)}{(4 + 8i) - (7 + 2i)} = \frac{-9 + 3i}{-3 + 6i}$$

$$= \frac{(1 + i)(-3 + 6i)}{(-3 + 6i)} = (1 + i)$$

1 ب

لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$ إذن : $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = |1+i|$

يعني : $\frac{|c-a|}{|b-a|} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

إذن : $|c-a| = \sqrt{2}\cdot|b-a|$

أي : $AC = \sqrt{2}\cdot AB$

من جهة ثانية ، لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = 1+i$

لنكتب العدد العقدي $(1+i)$ على الشكل المثلثي :

$$(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

إذن : $\frac{c-a}{b-a} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

و منه : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

أي : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

إذن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

2 أ

لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_B\left(\frac{\pi}{2}\right) : (\mathcal{P}) \mapsto (\mathcal{P})$; $M(z) \mapsto M'(z')$

ننطلق من المعطى : $\mathcal{R}(A) = D$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(D) - aff(B)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A) - aff(B))$$

يعني : $(d-b) = e^{\frac{i\pi}{2}}(a-b)$

يعني : $d - 4 - 8i = i(7+2i-4-8i)$

يعني : $d = 7i - 2 - 4i + 8 + 4 + 8i$

أي : $d = 10 + 11i$

2 ب

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{(10+11i) - (-2+5i)}{(4+8i) - (-2+5i)} = \frac{12+6i}{6+3i} = \frac{2(6+3i)}{(6+3i)} = 2$$

إذن : $\frac{d-c}{b-c} = 2$ و منه : $(d-c) = 2(b-c)$

و باستعمال المتجهات نكتب : $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{CB}$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمة .

يمكن أن نجيب بطريقة أخرى مبينة كما يلي :

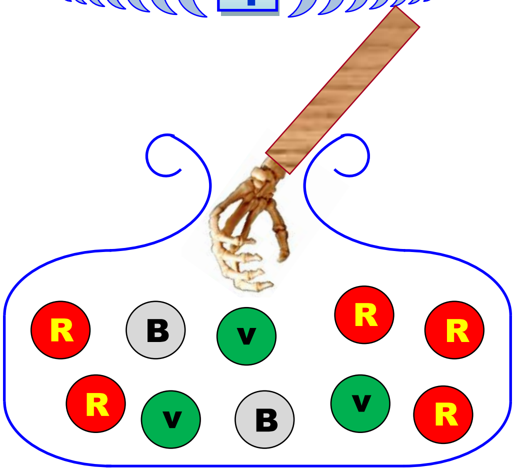
لدينا : $\frac{d-c}{b-c} = 2$ إذن : $\arg\left(\frac{d-c}{b-c}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv 0[2\pi]$

إذن النقط C و B و D نقط مستقيمة .

التمرين الثالث

1



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من صندوق يحتوي على 10 كرات فإنه توجد C_{10}^4 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية .

لدينا :

$$p(A) = p\left(\text{كرتان حمراوين و كرتان خضراوين}\right) = \frac{card\left(\text{كرتان حمراوين و كرتان خضراوين}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^2 \times C_3^2}{210} = \frac{10\times 3}{210} = \frac{1}{7}$$

و لدينا كذلك : $p(B) = p\left(\text{لا توجد أية كرة بيضاء مما سحبناه}\right)$

و نلاحظ أن :

$$\overline{\left(\text{لا توجد أية كرة بيضاء مما سحبناه}\right)} = \left(\text{توجد على الأقل كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة}\right) = \left(\text{كرتان بيضاوين و كرتان تخالفان اللون الأبيض}\right) \text{ أو } \left(\text{كرة بيضاء و واحدة و ثلاث كرات غير ذلك}\right)$$

$$p\left(\text{توجد على الأقل كرة بيضاء من بين الكرات الأربع المسحوبة}\right) = p\left(\text{كرة بيضاء و واحدة و ثلاث كرات غير ذلك}\right) + p\left(\text{كرتان بيضاوين و كرتان تخالفان اللون الأبيض}\right)$$

$$= \frac{C_2^1 \times C_8^3}{210} + \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{2\times 56}{210} + \frac{28}{210} = \frac{2}{3}$$

و بالتالي : $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2 أ

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة (يعني سحب أربع كرات في آن واحد) بعدد الكرات المسحوبة .

يضم الصندوق كرتين بيضاوين و 8 كرات تخالف اللون الأبيض .

إذن عندما نسحب في آن واحد أربع كرات فإنه يُحتمل الحصول على كرات كلها تخالف الأبيض ، أو الحصول على كرة بيضاء واحدة و الباقي يخالف الأبيض ، أو الحصول على كرتين بيضاوين و كرتين غير ذلك .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 و 1 و 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

2 ب

لدينا الحدث $[X=1]$ هو الحصول بالضبط على كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات مخالفة للون الأبيض .

إذن : $p[X=1]=\dfrac{C_2^1\times C_8^3}{210}=\dfrac{2\times 56}{210}=\dfrac{8}{15}$

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X احتمال كل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي .

لدينا حسب السؤال 1) : $p(B)=\frac{1}{3}$ إذن : $p[X=0]=\frac{1}{3}$

يكفي الآن أن نحسب $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول بالضبط على كرتين بيضاوين و كرتين تخالفين الأبيض

إذن : $p[X=2]=\dfrac{C_2^2\times C_8^2}{210}=\dfrac{28}{210}=\dfrac{2}{15}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X :\ \{0;1;2\} &\longmapsto [0;1]\\ 0 &\longmapsto P_X(0)=\tfrac{1}{3}\\ 1 &\longmapsto P_X(1)=\tfrac{8}{15}\\ 2 &\longmapsto P_X(2)=\tfrac{2}{15}\end{aligned}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نتحقق من أن :

$$P_X(0)+P_X(1)+P_X(2)=1$$

التمرين الرابع

1

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$. لدينا :

$$\begin{aligned}5-u_{n+1}&=5-\frac{25}{10-u_n}=\frac{50-5u_n-25}{10-u_n}\\&=\frac{25-5u_n}{10-u_n}=\frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}\end{aligned}$$

لنبين بالترجع صحة العبارة (P_n) المعرفة بما يلي :

$$(P_n) :\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 5-u_n>0$$

لدينا : $5-0>0$ يعني : $5-u_n>0$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ 5-u_n>0$

إذن الكمية $(5-u_n)$ كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $5(5-u_n)$ و $5+(5-u_n)$ موجبتان قطعا .

إذن $\dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ كمية موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}>0$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 5-u_{n+1}>0$

إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل إذن على ما يلي : $\begin{cases}(P_1)\ est\ vraie\\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 5-u_n>0$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا : $v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$

إذن :

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=\frac{5}{5-u_{n+1}}=5\times\left(\frac{1}{5-u_{n+1}}\right)\\&=5\times\left(\frac{5+(5-u_n)}{5(5-u_n)}\right)=\frac{5+(5-u_n)}{(5-u_n)}=\frac{10-u_n}{5-u_n}\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1}=\dfrac{10-u_n}{5-u_n}$

و منه :

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=\frac{10-u_n}{5-u_n}-\frac{5}{5-u_n}\\&=\frac{10-u_n-5}{5-u_n}=\frac{5-u_n}{5-u_n}=1\end{aligned}$$

2 ب

بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1}-v_n=1$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_{n+1}=v_n+1$

فإن : $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ متتالية حسابية أساسها 1 .

إذن حدها العام v_n يكتب على الشكل :

$$(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=v_1+(n-1)1$$

لدينا : $v_1=\dfrac{5}{5-u_1}=\dfrac{5}{5-0}=1$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=1+(n-1)1$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=n$

و بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=\dfrac{5}{5-u_n}$

فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ n=\dfrac{5}{5-u_n}$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 5n-nu_n=5$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ nu_n=5n-5$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=5-\dfrac{5}{n}$

2 ج

$$\lim_{n\infty}(u_n)=\lim_{n\infty}\left(5-\frac{5}{n}\right)=5-\frac{5}{\infty}=5-0=5$$

التمرين الخامس

1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2e^x=(+\infty-2)^2e^{+\infty}\\&=(+\infty)e^{+\infty}=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)^2e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x-2)^2\left(\frac{e^x}{x}\right)\\&=(+\infty)^2\times(+\infty)=+\infty\end{aligned}$$

نحصل إذن على النهايتين التاليتين : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$

و من هاتين النهايتين نستنتج أن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

2 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = (x-2)^2e^x &= (x^2-4x+4)e^x \\ &= x^2e^x - 4xe^x + 4e^x \end{aligned}$$

2 ب

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2e^x}_{\substack{x\to-\infty \\ \searrow \\ 0^+}} - 4\underbrace{xe^x}_{\substack{x\to-\infty \\ \searrow \\ 0^-}} + 4\underbrace{e^x}_{\substack{x\to-\infty \\ \searrow \\ 0^+}} = 0$$

محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

ملاحظة : $\lim_{x\to-\infty} x^ne^x = \begin{cases} 0^+ & si\ \ n\ est\ pair \\ 0^- & si\ \ n\ est\ impair \end{cases}$

3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f(x) = (x-2)^2e^x$

إذن :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2)e^x + (x-2)^2e^x \\ &= (x-2)e^x\big(2+(x-2)\big) \\ &= (x-2)xe^x \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = x(x-2)e^x$

3 ب

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f'(x) = x(x-2)e^x$

نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي x و $(x-2)$

و يُبَيِّنُ الجدول التالي إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إذن من خلال هذا الجدول نستنتج أن f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ و تناقصية على المجال $[0;2]$.

4 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f'(x) = x(x-2)e^x$

إذن : $f''(x) = (x-2)e^x + xe^x + x(x-2)e^x$

ملاحظة : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

و بالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f''(x) = (x^2-2)e^x$

و نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$

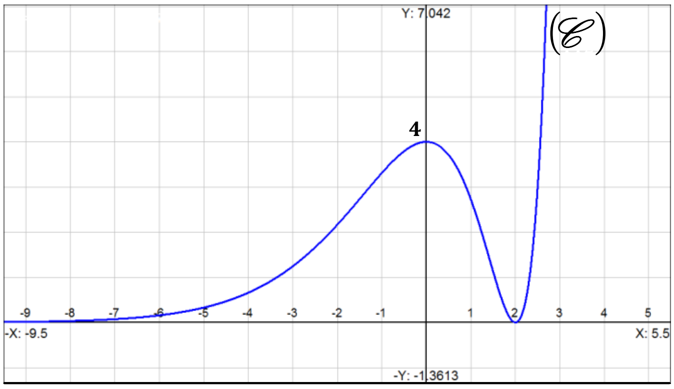
إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق فقط بإشارة (x^2-2) و نلاحظ أن يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما حلا المعادلة $x^2-2=0$

يعني : $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$

أي : $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$.

إذن المنحنى يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما هما $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$.

4 ب



5 أ

نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x) = (x-1)e^x$

نلاحظ أن H دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة على $\mathbb{R}$.

و لدينا :
$$\begin{aligned} H'(x) &= \big((x-2)e^x\big)' \\ &= e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx &= [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v\,dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= (e-0)-(e-1) = 1 \end{aligned}$$

5 ب

نحسب التكامل التالي باستعمال تقنية المكاملة بالأجزاء .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x}_{v'}\,dx &= [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx \\ &= [x^2e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx \\ &= (e-0) - 2\times 1 = e-2 \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\int_0^1 x^2e^x\,dx = e-2}$

5 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الجزء من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ ومحور الأفاصيل و المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$.

نحسب $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي : $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\, dx$

نعلم أن الدالة f تناقصية على $[0;2]$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[0;1]$.

إذا كان : $0 \leq x \leq 1$ فإن : $f(0) \geq f(x) \geq f(1)$

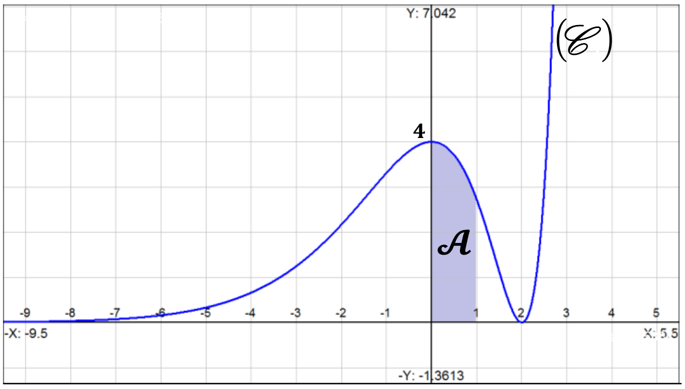
و منه : $4 \geq f(x) \geq e \geq 0$

إذن : $f(x)$ كمية موجبة قطعا على المجال $[0;1]$.

و منه : $\forall x \epsilon [0;1]\ ;\ |f(x)| = f(x)$

و بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ نكتب :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 (x^2e^x - 4xe^x + 4e^x)\, dx$$
$$= \int_0^1 x^2e^x\, dx - 4\int_0^1 xe^x\, dx + 4\int_0^1 e^x\, dx$$
$$= (e-2) - 4\times 1 + 4[e^x]_0^1$$
$$= (e-2) - 4 + 4(e-1) = 5e - 10$$
$$= 5(e-2) \approx 3{,}59\ cm^2$$



6

المعادلة : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$

تصبح : $x^2 - 4x + 4 = e^{-x}$

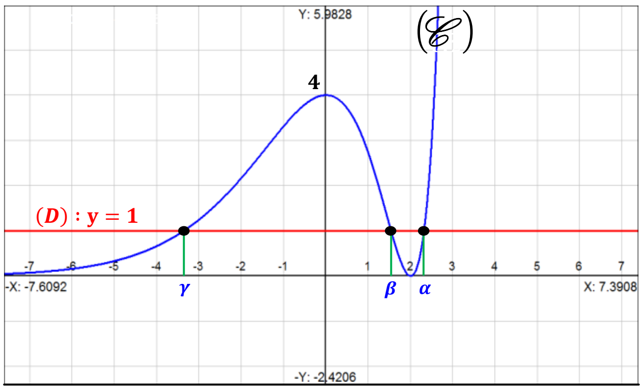
نضرب طرفي هذه المعادلة في الكمية الموجبة قطعا e^{-x} نجد :

$e^x(x^2 - e^{-x} - 4x + 4) = 0$

يعني : $x^2e^x - 4xe^x + 4e^x = 1$ يعني : $f(x) = 1$

إذن حلول هذه المعادلة الأخيرة هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $(D) : y = 1$.

و هو ما يُبَيِّنه الشكل التالي :



إذن : المعادلة تقبل ثلاثة حلول و هي α و β و γ .