

التمرين الثاني :

1

$$z^2 - 6z + 18 = 0$$

لدينا :  $\Delta = (-6)^2 - 4(18) = -36 = (6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقبيان  $z_1$  و  $z_2$  معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{6 - 6i}{2} = 3(1 - i) \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 + 6i}{2} = 3(1 + i)$$

● 2 ● (أ) ● 2 ●

$$a = 3 + 3i = 3(1 + i)$$

$$\begin{aligned} &= 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 3\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$b = 3 - 3i = 3(1 - i)$$

$$\begin{aligned} &= 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{-\pi}{4} - i \sin \frac{-\pi}{4} \right) \\ &= 3\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

● 2 ● (ب) ● 2 ●

$$\begin{cases} aff(A) = a = 3 + 3i = 3\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \\ aff(B) = b = 3 - 3i = 3\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ aff(B') = b' \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{P}) & \quad \text{و لدينا كذلك الإزاحة } t \text{ معرفة بما يلي :} \\ M \rightarrow M' = t_{\overrightarrow{OA}}(M) & \quad \text{لدينا : } t_{\overrightarrow{OA}}(B) = B' \\ & \quad \text{إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب :} \\ \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA} & \quad \text{و باستعمال التعابير العقدية نكتب :} \\ & \quad aff(B') - aff(B) = aff(A) - aff(O) \\ b' - 3 + 3i = 3 + 3i & \quad \text{يعني : } b' - b = a \end{aligned}$$

$$aff(B') = 6 \quad \text{يعني : } b' = 3 + 3i + 3 - 3i = 6$$

● 2 ● (ج) ● 2 ●

$$\begin{aligned} \frac{b - b'}{a - b'} &= \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} = \frac{-3(i + 1)}{-3(1 - i)} = \frac{i + 1}{1 - i} \\ &= \frac{(i + 1)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{1 - (-1)} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned}$$

لدينا :

$$\begin{cases} \left| \frac{b - b'}{a - b'} \right| = 1 \\ \arg \left( \frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و وبالتالي :  $\frac{b - b'}{a - b'} = i$

$$\begin{cases} |b - b'| = |a - b'| \\ \left( \overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} B'B = B'A \\ \left( \overrightarrow{B'A}; \overrightarrow{B'B} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

يعني :

و من هاتين النتيجتين نستنتج أن المثلث  $ABB'$  متساوي الساقين رأسه  $B'$  و كذلك قائم الزاوية في نفس النقطة  $B$ .

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول :

1

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16$$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين  $x_1$  و  $x_2$  معرفين بما يلي :



$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$$

● 1 ● (أ) ● 1 ●

$$e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$$

$$\frac{e^{2x} - 3 - 2e^x}{e^x} = 0$$

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

يعني :  $e^x = 3$  . إذن المعادلة تُصبح :  $t^2 - 2t - 3 = 0$  . نعلم حسب السؤال (1) أن : حل هذه المعادلة هما -1 و 3.

إذن :  $t = 3$  أو  $t = -1$

يعني :  $e^x = 3$  أو  $e^x = -1$   $(\forall x \in \mathbb{R})$  ;  $e^x > 0$

إذن المعادلة  $e^x = -1$  لا تقبل حلولا في  $\mathbb{R}$  . وبالتالي :

$$x = \ln 3 \quad \text{أي : } \ln(e^x) = \ln 3$$

و وبالتالي : المعادلة تقبل حلان وحيدان في  $\mathbb{R}$  وهو العدد الحقيقي  $\ln 3$  .

2

$$e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$$

بعد تعميل الطرف الأيسر نحصل على :

$$(e^{2x+2} - 1) \geq 0$$

نلاحظ أن إشارة الطرف الأيسر تتعلق فقط ببادرة  $(e^{2x+2} - 1)$

و ذلك لأن  $e^{-x} > 0$

لحل أولاً المعادلة  $e^{2x+2} - 1 = 0$  . التي تعني :

$$x = \frac{-1}{2} \quad \text{أي } 2x + 1 = 0 \quad 2x + 1 = \ln 1$$

و بذلك نستنتج جدول الإشارة التالي :

$x$	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$e^{-x}$	+		+
$e^{2x+2} - 1$	-	0	+
$e^{-x}(e^{2x+2} - 1)$	-	0	+

من خلال الجدول :  $\forall x \in \left[ \frac{-1}{2}; +\infty \right[ ; e^{-x}(e^{2x+2} - 1) \geq 0$

$$S = \left[ \frac{-1}{2}; +\infty \right[$$

إذن (S) مجموعة حلول المترادحة هي :



$$\text{و بالتالي: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$$

إذن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متالية هندسية أساسها  $\frac{1}{6}$ .

و منه فإن الحد العام للمتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  يكتب على الشكل التالي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

$$\text{لدينا: } v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

إذن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

لدينا حسب السؤال (2) :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$$

يعني :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - \frac{1}{3u_n} = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{3 - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

و بالتالي :

$$\text{نلاحظ أن } \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ متالية هندسية أساسها } \frac{1}{6} \text{ و هو عدد حقيقي أصغر من 1.}$$

$$\lim_{n \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \infty} u_n = \lim_{n \infty} \left( \frac{1}{3 - 2 \left(\frac{1}{6}\right)^n} \right) = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{و منه: } \lim_{n \infty} (u_n) = \frac{1}{3}$$

و بالتالي :

التمرين الرابع :

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I = ]0; +\infty[$ .

$$\text{لدينا: } g(x) = x - 1 + \ln x$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in I) ; g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

إذن :

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . إذن:  $x > 0$

$$\text{و منه: } x + 1 > 0$$

$$\text{إذن: } (\forall x \in I) ; \frac{x+1}{x} > 0$$

$$(\forall x \in I) ; g'(x) > 0$$

يعني :

أي أن الدالة  $g$  تزايدية قطعا على المجال  $I$ .



د 2

$$OA = |z_A - z_0| = |a| = \left| 3\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} \right| = 3\sqrt{2}$$

لدينا :

$$AB' = |z_{B'} - z_A| = |6 - 3 - 3i| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2}$$

$$B'B = |z_B - z_{B'}| = |3 - 3i - 6| = 3\sqrt{2}$$

$$BO = |z_0 - z_B| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2}$$

نستنتج إذن أن:  $OA = AB' = B'B = BO$

و منه فإن الرباعي  $OAB'B$  مُعين لأن جميع أضلاعه متقايسة.

و بما أن الزاوية  $\hat{B}$  زاوية قائمة حسب نتيجة السؤال (ج).

فإن الرباعي  $OAB'B$  مربع لأنه مُعين و إحدى زواياه قائمة.

التمرين الثالث :



أ 1

$$u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$$

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n} - \frac{1}{3}$$

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{18u_n - (1 + 15u_n)}{3(1 + 15u_n)}$$

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3u_n - 1}{3(1 + 15u_n)}$$

$$(*) \quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}$$

إذن :

لنبرهن على صحة العبارة  $(P_n)$  التالية :

لدينا:  $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$ . إذن العبارة  $(P_0)$  صحيحة.

نفترض أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$

إذن:  $(15u_n + 1) > 6 > 0$  و  $(u_n - \frac{1}{3}) > 0$

و منه فإن الكمية  $\frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$  موجبة قطعا لأنها خارج كميتين موجبتين قطعا

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$$

و منه حسب النتيجة  $(*)$  :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > \frac{1}{3}$$

أي:  $u_{n+1} > \frac{1}{3}$

و هذا يعني أن العبارة  $(P_{n+1})$  صحيحة.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع :

ليكن  $n$  عنصرا من المجموعة  $\mathbb{N}$ . لدينا:

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{1 + 15u_n}{6u_n} \right) = 1 - \frac{1 + 15u_n}{18u_n}$$

$$= \frac{18 - (1 + 15u_n)}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{6u_n}$$

$$= \frac{1}{6} \left( \frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n} \right) = \frac{1}{6} v_n$$

2 II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[1; +\infty]$ .

إذن حسب نتيجة السؤال (I) (2) :

يعني :  $(x > 0) \rightarrow \frac{g(x)}{x^2} \geq 0$  ( لأن :  $0 > 0$ )

و منه :  $\forall x \in [1; +\infty[ ; f'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة تزايدية على المجال  $[1; +\infty[$ .

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[1; +\infty[$ .

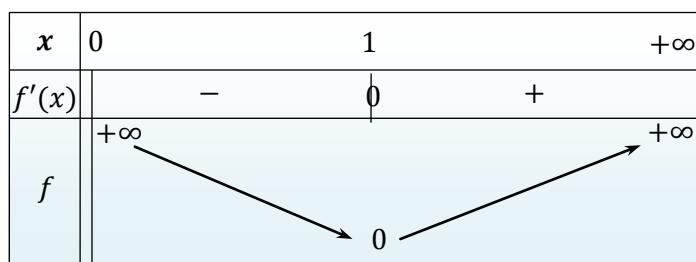
إذن حسب نتيجة السؤال (I) (2) :

يعني :  $(x > 0) \rightarrow \frac{g(x)}{x^2} \leq 0$  ( لأن :  $0 > 0$ )

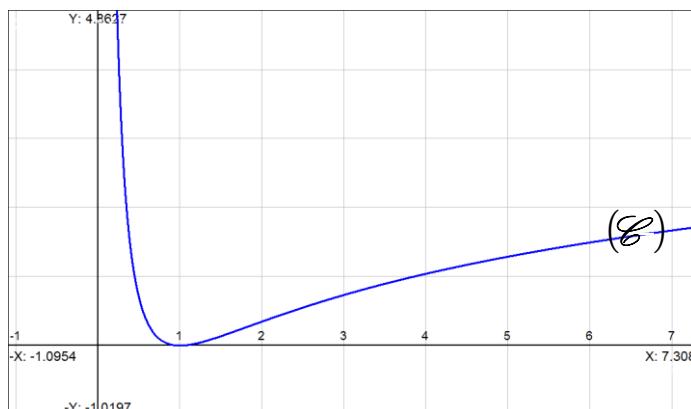
و منه :  $\forall x \in ]0; 1] ; f'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0; 1]$ .

3 II



3 II



4 II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :

$$H'(x) = \frac{2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$$

إذن الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على المجال  $I$ .

4 II

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

2 I

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[1; +\infty]$ . إذن :

و منه :  $g(x) \geq g(1)$  لأن  $g$  دالة تزايدية قطعا على  $I$



و لدينا :

$$g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$$

إذن :  $\forall x \in [1; +\infty[ ; g(x) \geq 0$

و ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[1; +\infty[$ . إذن :

و منه :  $g(x) \leq g(1)$  لأن  $g$  دالة تزايدية على  $I$ .

و لدينا :

$$g(1) = 0$$

إذن :  $\forall x \in ]0; 1] ; g(x) \leq 0$

أ II

1 II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = \left( 1 - \frac{1}{0^+} \right) (-\infty)$$

$$= (1 - \infty)(-\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  و تأويلها الهندسي هو أن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (محور الأرائيب) مقارب عمودي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار الصفر على اليمين.

ج II

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln x$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (1 - 0)(+\infty) = +\infty$$

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right) \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \frac{\ln x}{x}$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{+\infty} \right) (0) = (1 - 0)(0) = 0$$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  إذن :

من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاسيل بجوار  $+\infty$ .

1 II

أ 4 II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :

$$H'(x) = \frac{2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$$

إذن الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على المجال  $I$ .

ب 4 II

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

أ 2 II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :

$$f'(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x + (\ln x)' \left( \frac{x-1}{x} \right)$$

$$= \left( \frac{x - (x-1)}{x^2} \right) \ln x + \frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x} \right)$$

$$= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$



ج

4

II

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e \frac{1}{u'} \cdot \ln x \, dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv' \, dx \\
 &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left( x \cdot \frac{1}{x} \right) dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\
 &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e \\
 &= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1
 \end{aligned}$$

أ

5

II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x = \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x} \\
 \text{إذن : } &(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}
 \end{aligned}$$

ب

5

II

لتكن  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى  $(\mathcal{C})$  و محور الأفاسيل و المستقيمين اللذين معادلاتها  $1$  و  $x = e$  و  $x = 1$  . نعلم أن التكامل يقيس دائما طول أو مساحة أو حجم .

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| \, dx \quad \text{إذن :}$$

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  أن  $0$  قيمة دنوية للدالة  $f$  على  $I$  .

يعني :  $(\forall x \in I) ; f(x) \geq 0$

و منه :  $(\forall x \in I) ; |f(x)| = f(x)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)| \, dx = \int_1^e f(x) \, dx = \int_1^e \left( \ln x - \frac{\ln x}{x} \right) \, dx \\
 \text{إذن : } &= \int_1^e \ln x \, dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (unité)}^2 \\
 &= \frac{1}{2} (1 \text{ cm})^2 = 0,5 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

