

التمرين الأول

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{2 + U_n} \end{cases} \text{ لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1- بين أن $U_n > 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

2- أ- بين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(2 - U_n)}{U_n + 2}$ و أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$
ب- استنتج أنها متقاربة

3- نضع $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية وأحسب V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ وأحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج- نضع $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{U_k}$ بين أن $S_n = n - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (لاحظ أن $V_k = 1 - \frac{2}{U_k}$)

4- أ- بين أن $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|U_n - 2|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- بين بالترجع أن $|U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ثم استنتج مرة أخرى النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثاني

(I) 1- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z^2 - 4Z + 8 = 0$

2- نضع $a = 2 - 2i$ و $b = 2 + 2i$

أ- حدد الشكل المثلثي للعدد b

ب- بين أن $b^{2014} - a^{2014} = -2^{3022}i$

www.manti.ift.fr

(II) نعتبر في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

النقطتين B , Ω لحقاهما على التوالي $Z_B = 2 + 2i$, $w = i$

وليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{3\pi}{2}$ ونضع $A = R(B)$

1- أ- حدد التمثيل العقدي للدوران R

ب- استنتج أن لحق النقطة A هو العدد $Z_A = 1 - i$

2- أ- أحسب العدد $\frac{Z_B}{Z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث OAB

ب- استنتج أن النقط O , A , B و Ω متداورة

3- حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالازاحة T متجهتها $\vec{v}$

التمرين الثالث

الفضاء (ξ) المنسوب إلى $M(3,3)$ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$

والمستوى (P) الذي معادلته $x - y - z + 1 = 0$

1- بين أن مركز (S) هو النقطة $\Omega(1, 2, 3)$ وشعاعها يساوي $\sqrt{6}$

2- أعط معادلة للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في النقطة $A(0, 3, 1)$

3- أ- حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (P)

ب- أحسب المسافة $d = d(\Omega, (P))$

استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) في دائرة (C)

ج- حدد إحداثيات المركز Ω' وقيمة الشعاع R' بدائرة (C)

4- أ- أدرس تقاطع الفلكة (S) والمستقيم $t \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$ (D)

ب- ماذا تستنتج؟