Physique 14 : Étude énergétique des systèmes mécaniques

1. Comment déterminer le travail d'une force appliquée à l'extrémité d'un ressort ?

En classe de Première, nous avons calculé le travail d'une force constante.

Lorsqu'on tire sur un ressort, la force que l'on exerce n'est pas constante puisqu'elle dépend de l'allongement du ressort. Comment, alors, calculer son travail [Doc. 1] ?

Doc. 1 *Lorsque l'archer tend son arc, la force qu'il exerce sur la corde n'est pas constante. Comment calculer le travail de cette force lors de la tension de la corde de l'arc ?*

1.1 Travail élémentaire d'une force

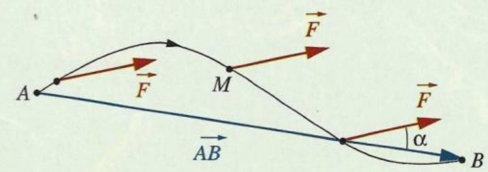
Rappelons l'expression du travail d'une force constante [Doc. 2].

> Travail d'une force constante

Le travail $W_{AB}(\vec{F})$ d'une force constante $\vec{F}$, dont le point d'application M se déplace de A à B, est donné par la relation :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}\,.\,\overrightarrow{AB}, \text{ soit } W_{AB}(\vec{F}) = F\,.\,AB\,.\cos\alpha$$

avec $W_{AB}(\vec{F})$ en joule (J), F en newton (N), AB en mètre (m) et α, l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$.



Doc. 2 *La force étant constante le long du trajet entre A et B, son travail s'exprime par :* $W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}\,.\,\overrightarrow{AB}$.

> Travail élémentaire

Si la force n'est pas constante, l'expression précédente n'est plus valable.

On décompose alors la trajectoire du point d'application de la force en segments élémentaires $\Delta\ell_i$ [Doc. 3]. Sur chacun de ces petits segments, la force notée $\vec{F}_i$ peut être considérée comme constante. Pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\Delta\ell}_i$, elle effectue le travail :

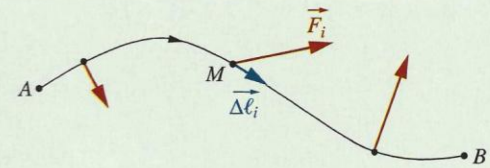
$$w_i = \vec{F}_i\,.\,\overrightarrow{\Delta\ell}_i.$$

Le travail total, effectué pour le déplacement de A à B du point d'application, est égal à la somme de tous ces travaux élémentaires :

$$W_{AB} = \Sigma w_i = \Sigma \vec{F}_i\,.\,\overrightarrow{\Delta\ell}_i.$$

Pour transformer ce calcul approché en calcul exact, il faut faire tendre $\overrightarrow{\Delta\ell}_i$ vers $\vec{0}$. La somme précédente devient alors égale à l'intégrale :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\,.\,\overrightarrow{d\ell}.$$



Doc. 3 *La force est variable le long du trajet AB.*

La notation $\overrightarrow{d\ell}$ représente un déplacement infinitésimal le long duquel la force peut être considérée comme constante.
Nous noterons le travail élémentaire d'une force variable par :

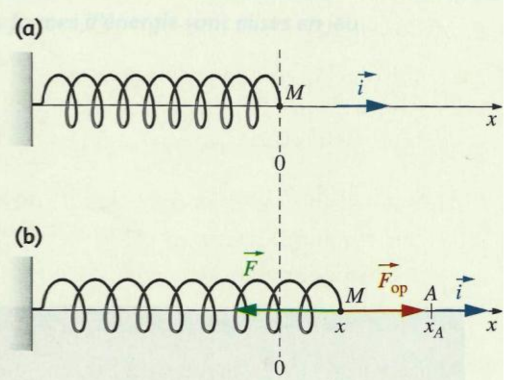
$$dW = \vec{F}\,.\,\overrightarrow{d\ell}.$$

1.2 Travail de la force exercée par un opérateur sur un ressort

> Un opérateur tire sur l'extrémité libre M du ressort dont l'autre extrémité est fixe. Il provoque un déplacement $\overrightarrow{OM} = x\,.\,\vec{i}$ de l'extrémité libre (O est la position de M lorsque le ressort a sa longueur naturelle) [Doc. 4].

La force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort sur l'opérateur est de la forme :

$$\vec{F} = -k\,.\,\overrightarrow{OM} = -k\,.\,x\,.\,\vec{i} \text{ [Doc. 4]}.$$



Doc. 4 *Force $\vec{F}_{op}$ exercée par un opérateur à l'extrémité d'un ressort pour l'étirer ou le comprimer et $\vec{F}$, force de rappel exercée par le ressort sur l'opérateur.*

D'après la troisième loi de NEWTON, la force exercée par l'opérateur est :

$$\vec{F}_{op} = -\vec{F} = k \cdot x \cdot \vec{i}.$$

Cette force dépend de x. Elle n'est pas constante. Calculons son travail lorsque M passe de O en A **[Doc. 4b]**.

> Lorsque l'opérateur provoque un déplacement élémentaire tel que $\vec{d\ell} = dx \cdot \vec{i}$, il doit fournir le travail élémentaire :

$$dW(\vec{F}_{op}) = \vec{F}_{op} \cdot \vec{d\ell} = k \cdot x \cdot \vec{i} \cdot dx \cdot \vec{i} = k \cdot x \cdot dx.$$

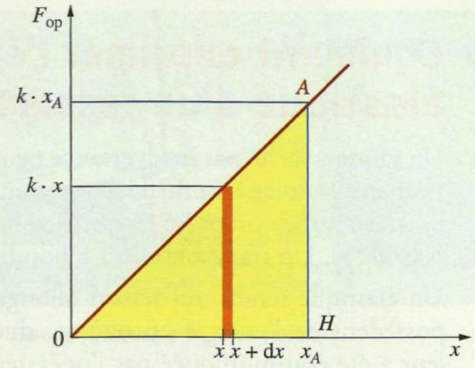
Le travail total de la force exercée par l'opérateur lorsque M passe de $O (x = 0)$ en $A (x = x_A)$ est égal à :

$$W(\vec{F}_{op}) = \int_0^{x_A} k \cdot x \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2\right]_0^{x_A} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2.$$

> On retrouve ce résultat par une méthode graphique **[Doc. 5]**. Sur le graphique, le travail élémentaire $dW = F_{op} \cdot dx$ est représenté par l'aire du rectangle hachuré.

- Pour allonger le ressort de $x = 0$ à $x = x_A$, il faut effectuer un travail égal à la somme des aires de tous les rectangles élémentaires de largeur dx et de longueur kx. Cette aire est alors égale à l'aire du triangle OAH, soit :

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A \cdot x_A = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_A^2.$$



Doc. 5 *Intégration graphique. La droite OA a pour équation $F_{op} = k \cdot x$.*

Le travail d'une force appliquée par un opérateur à l'extrémité d'un ressort et provoquant un allongement x à partir de sa longueur naturelle est :

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

avec W en joule (J), k en newton par mètre (N . m^{-1}) et x en mètre (m).

- Pour allonger le ressort de x_A à x_B, l'opérateur fournit le travail :

$$W(\vec{F}_{op}) = \int_{x_A}^{x_B} k \cdot x \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2\right]_{x_A}^{x_B}$$

soit :

$$W(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_B^2 - x_A^2).$$

Exercice d'entraînement 1

Calculer le travail de la force exercée par l'opérateur sur l'extrémité d'un ressort de raideur $k = 100$ N . m^{-1} lorsque l'allongement x du ressort passe de 2 à 3 cm, puis de 3 à 2 cm.

> **Pour s'entraîner : Ex. 1 et 2**

2. Comment exprimer l'énergie potentielle élastique d'un ressort ?

Un sandow lâché par inadvertance peut faire très mal *[Doc. 6]*. Un pistolet à fléchette peut lancer une fléchette avec une grande vitesse. Lors d'un saut, la perche courbée propulse le perchiste très haut (voir l'*activité préparatoire A*, page 313). Un trampoline fait rebondir la gymnaste (voir la page 312).

Un élastique tendu, un ressort allongé ou comprimé, une perche courbée possèdent de l'énergie en réserve, due à leur déformation. Cette énergie leur a été communiquée par l'opérateur qui a provoqué leur déformation. Elle est restituée lorsque ces corps élastiques reprennent leur forme initiale. Cette énergie emmagasinée est appelée **énergie potentielle élastique**.

L'énergie potentielle élastique emmagasinée dans un ressort déformé est égale au travail que doit effectuer un opérateur pour le déformer.

Doc. 6 *Le sandow permet de fixer les objets sur le porte-bagages. Déformé, il possède de l'énergie potentielle élastique : il faut être prudent lorsqu'on le manipule.*

Nous avons calculé ce travail au paragraphe 1.2 ; il est égal à $W_{op} = \frac{1}{2} . k . x^2$.

L'énergie potentielle élastique d'un ressort de constante de raideur k, d'allongement ou de raccourcissement x s'exprime par :

$$E_{P\ \text{élas}} = \frac{1}{2} . k . x^2$$

avec $E_{P\ \text{élas}}$ exprimée en joule (J), k en newton par mètre ($N . m^{-1}$) et x en mètre (m).
L'énergie potentielle élastique est toujours positive.

Le travail $W(\vec{F}_{op})$ de la force exercée par l'opérateur entre deux positions $A(x_A)$ et $B(x_B)$ est égal à :

$$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \frac{1}{2} . k . x_B^2 - \frac{1}{2} . k . x_A^2$$
$$= E_{P\ \text{élas}}(B) - E_{P\ \text{élas}}(A) = \Delta E_{P\ \text{élas}}$$

Considérons maintenant la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur l'opérateur (force de rappel) : $\vec{F} = -\vec{F}_{op}$; donc $W(\vec{F}) = -\Delta E_{P\ \text{élas}}$.

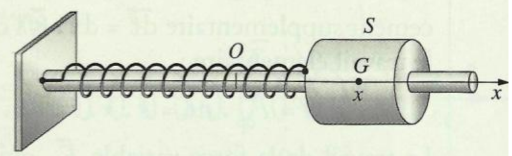
La variation de l'énergie potentielle élastique est égale à l'opposée du travail de la force de rappel : $W(\vec{F}) = -\Delta E_{P\ \text{élas}}$.

Énergie potentielle élastique d'un ressort : $E_{P\ \text{élas}} = \frac{1}{2} . k . x^2$

> *Pour s'entraîner : Ex. 3*

3. Comment exprimer l'énergie mécanique d'un système {solide, ressort} ?

Intéressons-nous au mouvement horizontal d'un oscillateur élastique en translation *[Doc. 7]*.



Doc. 7 *Oscillateur élastique horizontal en translation. O coïncide avec la position G_o de G lorsque le ressort a sa longueur naturelle (équilibre du système {solide-ressort}).*

3.1 Introduction expérimentale de la notion d'énergie mécanique

Étudions un oscillateur élastique non amorti.

Activité 1

Étude énergétique d'un oscillateur horizontal non amorti

• Faire osciller, sur un rail à coussin d'air, un mobile de masse m connue, relié à un ressort de raideur k connue **[Doc. 8]**.

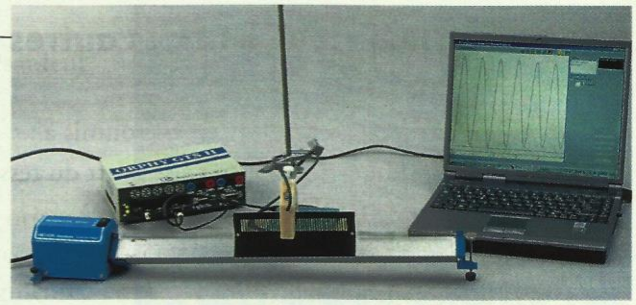
• Enregistrer l'abscisse x du centre d'inertie du mobile en fonction du temps ($x = 0$ correspond au mobile au repos).

• Faire calculer la vitesse ϑ, l'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \vartheta^2$, l'énergie potentielle élastique $E_{P\,\text{élas}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$ et la somme de ces deux énergies.

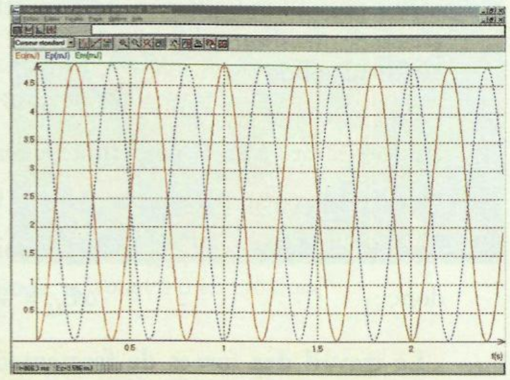
• Faire tracer l'évolution de ces grandeurs en fonction du temps.

1. Comparer les variations de $E_{P\,\text{élas}}$ et de E_C.

2. Conclure sur l'évolution temporelle de la somme $E_C + E_{P\,\text{élas}}$.



Doc. 8 *Dispositif expérimental.*



Doc. 9 *Représentation des énergies cinétique et potentielle élastique en fonction du temps : quand une énergie est maximale, l'autre est nulle. E_c est représentée en rouge, $E_{P\,\text{élas}}$ en bleu et E_M en vert.*

> Observation

Lorsque l'énergie potentielle élastique est maximale, l'énergie cinétique est nulle et vice versa **[Doc. 9]**.

Nous constatons que la somme $E_C + E_{P\,\text{élas}}$ est constante, dans la mesure où les frottements sont négligeables.

> Interprétation

• Lorsque le mobile passe par sa position de repos ($x = 0$), $E_{P\,\text{élas}} = 0$ **[Doc. 10a]** ; la vitesse a une valeur maximale : E_C est maximale.

• Lorsque $|x| = x_m$, l'élongation est maximale en valeur absolue **[Doc. 10b]** : $E_{P\,\text{élas}}$ **est maximale** ; le mouvement du mobile change de sens et la vitesse s'annule : $E_C = 0$.

On définit l'énergie mécanique par :

$$E_M = E_C + E_{P\,\text{élas}}.$$

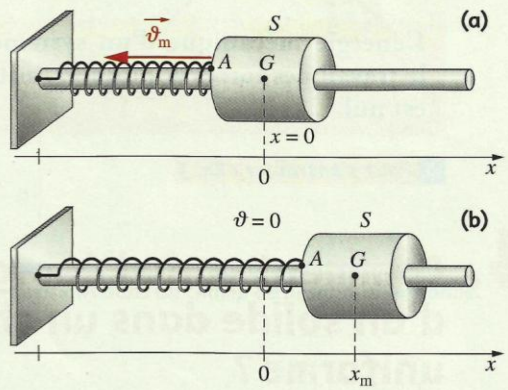
En l'absence de frottement, l'énergie mécanique $E_M = E_C + E_{P\,\text{élas}}$, du système {solide, ressort} horizontal, est constante.

Puisque E_M ne varie pas : $\Delta E_M = 0$, soit $\Delta E_C + \Delta E_{P\,\text{élas}} = 0$;

d'où :

$$\Delta E_C = -\Delta E_{P\,\text{élas}}.$$

Il y a transformation entre les énergies cinétique et potentielle élastique.



Doc. 10 **(a)** *En $x = 0$, la vitesse est maximale : l'énergie mécanique est sous forme cinétique.* **(b)** *Lorsque $|x| = x_m$, $\vartheta = 0$: l'énergie du système mécanique est sous forme élastique.*

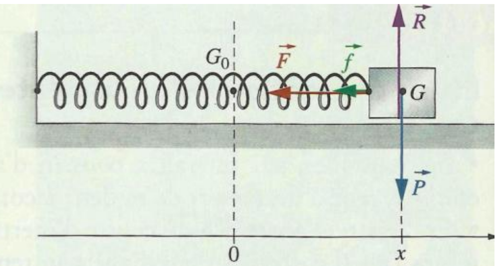
Exercice d'entraînement 2

Un solide de masse $m = 0{,}20$ kg oscille sans frottements à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur $k = 10\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. L'amplitude des oscillations est $x_m = 5{,}0$ cm.

1. Calculer l'énergie mécanique de cet oscillateur.

2. Calculer la vitesse maximale du solide.

3.2 Influence des forces autres que la force élastique



Doc. 11 *Oscillateur élastique soumis à des frottements. Le mobile se déplace vers la droite.*

Le solide de l'oscillateur ***[Doc. 11]*** est soumis à :

– la force élastique $\vec{F}$ de rappel de la part du ressort ;
– son poids $\vec{P}$;
– l'action $\vec{R}$ du support ;
– à la force de frottement $\vec{f}$.

Le théorème de l'énergie cinétique étudié en classe de Première (voir les *pré-requis*, page 9) indique que, dans un référentiel galiléen, **la variation d'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide :**

$$\Delta E_C = \sum W = W(\vec{F}) + W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f}).$$

Les forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$ étant perpendiculaires au déplacement, leur travail est nul.

Nous avons vu au paragraphe 2 que : $W(\vec{F}) = -\Delta E_{P\,\text{élas}}$.

Alors : $\Delta E_C = -\Delta E_{P\,\text{élas}} + W(\vec{f})$, soit $\Delta E_C + \Delta E_{P\,\text{élas}} = W(\vec{f})$,

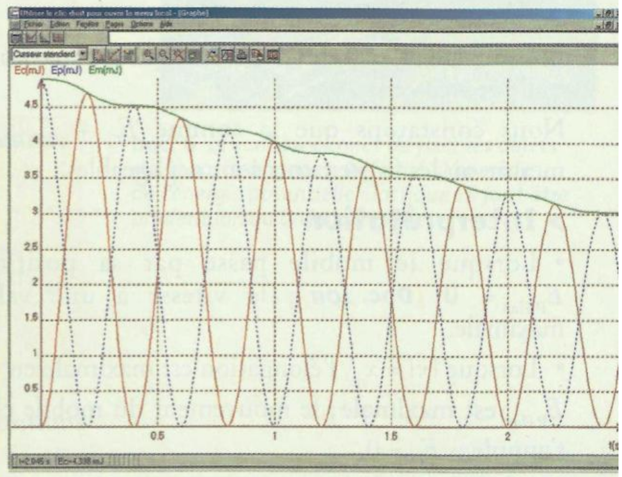
donc : $\Delta E_M = W(\vec{f})$.

Le travail des forces de frottement étant négatif, l'énergie mécanique du système diminue *[Doc. 12]*.

En l'absence de frottement, $W(\vec{f}) = 0$; et $\Delta E_M = 0$; l'énergie mécanique est constante. Les oscillations ne sont pas amorties.

L'énergie mécanique d'un système oscillant se conserve si le travail des forces appliquées, autres que la force de rappel, est nul.

Pour s'entraîner : Ex. 5



Doc. 12 *L'énergie mécanique (représentée en vert) diminue lorsque l'oscillateur est soumis à des forces de frottement.*

4. Comment varie l'énergie mécanique d'un solide dans un champ de pesanteur uniforme ?

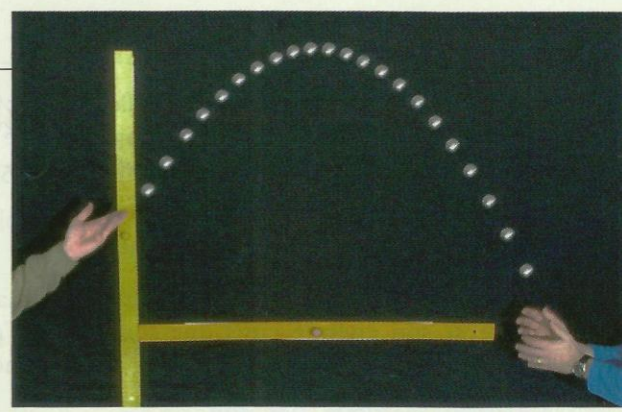
Un projectile en mouvement possède de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur. Étudions son énergie mécanique.

Activité 2

Comment varie l'énergie mécanique d'un projectile ?

• Filmer une bille lancée dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée d'un caméscope ***[Doc. 13]***.
• Analyser le film à l'aide d'un logiciel de traitement d'images.
• Faire tracer, en fonction du temps, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique de la bille, dans la même fenêtre graphique.

1. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?
2. Comment évoluent les énergies cinétique, potentielle de pesanteur et mécanique ?



Doc. 13 *Mouvement d'une balle enregistré au camescope.*

> Observation

En classe de Première, nous avons défini l'énergie potentielle de pesanteur $E_{\text{P pes}}$ d'un solide par :

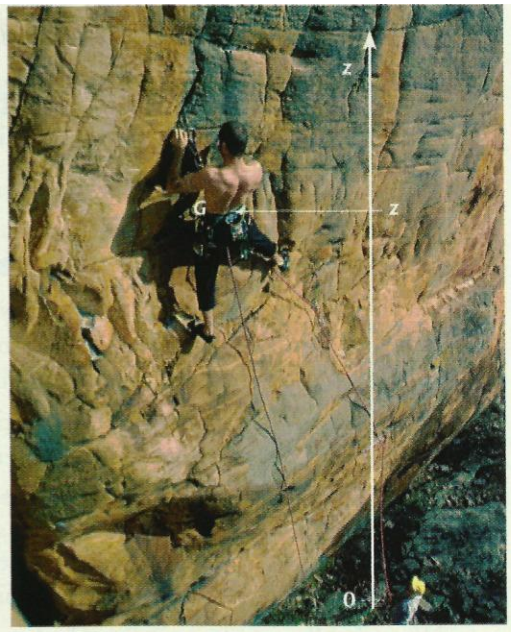
$$E_{\text{P pes}} = m \cdot g \cdot z$$

où z est la cote du centre de gravité G, en mètre (m) et l'axe (Oz) est orienté vers le haut **[Doc. 14]**.

Lorsque le projectile s'élève, son énergie potentielle de pesanteur augmente, tandis que son énergie cinétique diminue. Lorsque le projectile descend, son énergie potentielle de pesanteur diminue, tandis que son énergie cinétique augmente. La somme de ces deux énergies est constante.

Lors d'une chute libre :

$$E_M = E_C + E_{\text{P pes}} = \frac{1}{2} m \cdot \vartheta^2 + m \cdot g \cdot z \text{ est constante.}$$



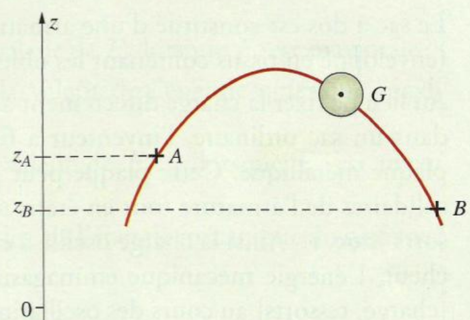
Doc. 14 *L'origine O est arbitraire.*

> Interprétation

Calculons la variation de l'énergie mécanique entre deux positions A et B du centre d'inertie G de la bille **[Doc. 15]**.

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \frac{1}{2} m \cdot \vartheta_B^2 + m \cdot g \cdot z_B - \frac{1}{2} m \cdot \vartheta_A^2 - m \cdot g \cdot z_A$$

$$\Delta E_M = \Delta E_C + m \cdot g \cdot (z_B - z_A) \quad (1)$$



Doc. 15 *Projectile en mouvement entre deux positions dans un champ de pesanteur uniforme.*

La bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et éventuellement à une force de frottement $\vec{f}$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique vu précédemment :

$\Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{f})$.

Or $W(\vec{P}) = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$.

Donc : $\Delta E_C = m \cdot g \cdot (z_A - z_B) + W(\vec{f})$.

Finalement, d'après la relation (1), nous obtenons :

$$\Delta E_M = W(\vec{f}).$$

- En l'absence de frottements (chute libre)

Nous avons alors $W(\vec{f}) = 0$ et $\Delta E_M = 0$: **l'énergie mécanique est constante.**

C'est ce que nous avons constaté expérimentalement.

Ce résultat se généralise au cas d'un mouvement quelconque si le travail de toutes les forces appliquées au solide, autre que le poids, est nul (mouvement sur un plan incliné, par exemple).

Dans le cas particulier d'une chute libre où seul intervient le poids $\vec{P}$, l'énergie mécanique du solide est évidemment conservée (voir l'*activité préparatoire B*, page 313).

- En présence de frottements

Le travail des forces de frottement étant négatif, nous avons $W(\vec{f}) < 0$ et $\Delta E_M < 0$: **l'énergie mécanique diminue.**

Dans ce cas, la perte d'énergie mécanique se retrouve généralement convertie en chaleur transférée à l'air ambiant et à la surface du projectile (échauffement) **[Doc. 16]**.


Doc. 16 *La navette spatiale est munie d'un bouclier thermique qui la protège lors de son entrée dans l'atmosphère.*

> Pour s'entraîner : Ex. 7