

Niveaux: SM PC SVT

Matière: Physique

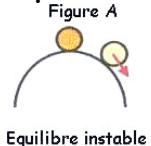
PROF: Zakaryae Chriki

Résumé N:16

Oscillateurs Mécaniques : Pendule Elastique



**Oscillateur mécanique : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autours de sa position d'équilibre stable**



Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A :** elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B :** elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.

## I. Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort**, est constitué d'un solide, de masse  $m$ , fixé à un ressort, de longueur initiale  $\ell_0$  et de raideur  $K$ , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

### 1. La Tension de ressort

$$T = K \cdot \Delta\ell$$

Tension du ressort (N)

$$\Delta\ell = \ell - \ell_0$$

Allongement du ressort (m)

$$\ell_0$$

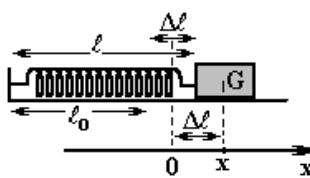
Longueur initiale  $\ell_0$  (m)

$$K$$

Raideur du ressort (N/m)

### Expression de $\Delta\ell$

Ressort horizontal

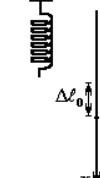


Ressort horizontal initialement non allongé et fixé directement au mobile ou au moyen d'un fil inextensible et de masse négligeable

$$\Delta\ell = x$$

Ressort vertical ou incliné

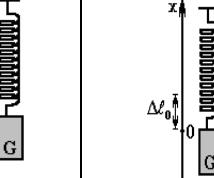
On admet que le mouvement du solide est dans le sens positif et on conclut



$$\Delta\ell = \ell - \ell_0$$

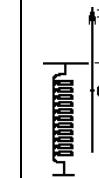
Si le ressort s'allonge alors

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$$



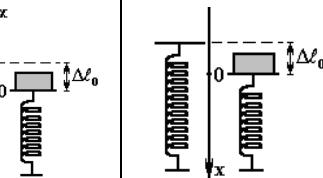
Si le ressort se compresse alors

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 - x$$



Si le ressort s'allonge alors

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 - x$$

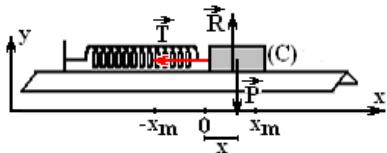


Si le ressort se compresse alors

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$$

### 2. Equation différentielle :

Un solide, de masse  $m$  sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale  $\ell_0$  et de raideur  $K$ ,



Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$  : Tension du ressort
- $\vec{R}$  : Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$  : Poids du corps (C)

En appliquant la 2<sup>eme</sup> loi de Newton :  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{T} \left( \begin{array}{l} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{array} \right) \text{ et } \vec{P} \left( \begin{array}{l} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m \cdot g \end{array} \right) \text{ et } \vec{R} \left( \begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y = R \end{array} \right) \text{ et } \vec{a}_G \left( \begin{array}{l} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{array} \right)$$

Sur l'axe Ox :  $T_x + R_x + P_x = m \cdot a_x$

$$-T = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot \Delta\ell = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot x = m \cdot \ddot{x} \text{ d'où } -\frac{K}{m} \cdot x = \ddot{x}$$

donc  $\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$  : Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G

L'équation différentielle est de la forme  $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$  ou bien  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  (en rad/s)

### 3. Equation horaire ou la solution de l'équation différentielle :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi \right)$$

ou bien

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

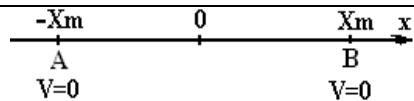
avec

$x(t)$  : l'abscisse (élongation) du point G et varie entre  $X_m$  et  $-X_m$   
 $X_m$  : Amplitude ou élongation maximale  
 $\omega_0$  : pulsation (rad/s)  
 $T_0$  : la période (s)  
 $\omega_0 \cdot t + \varphi$  : Phase à l'instant t  
 $\varphi$  : Phase à l'origine des temps  $t=0$

Déterminer les constantes  $X_m$ ,  $T_0$  et  $\phi$  :

## \*\* Comment déterminer $X_m$

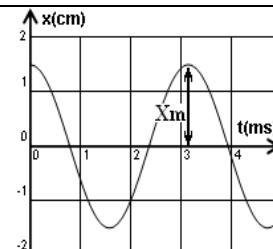
### 1. Phrase



- On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale  
 $X_m = 2\text{cm}$
- Le corps oscille entre deux points A et B distante de  $AB = 4\text{cm}$   
 $X_m = 2\text{cm}$  d'où  $AB = 2 \cdot X_m = 4\text{cm}$

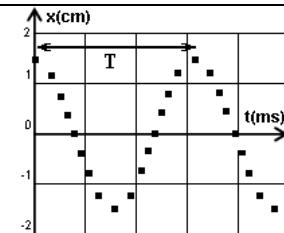
### 2. Graphiquement

#### 2.1. Par rapport à l'axe temps



$$X_m = 1.5\text{cm}$$

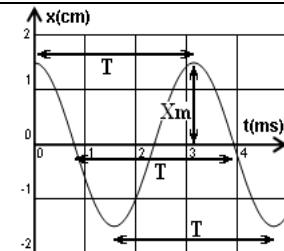
### 3. Enregistrement



$\tau$  : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs

$$T = 16 \cdot \tau$$

### 4. Graphiquement $x=f(t)$



Attention à la lecture et à l'échelle

$$T_0 = 3.2\text{ms}$$

## \*\* Comment déterminer la phase à l'origine $\phi$

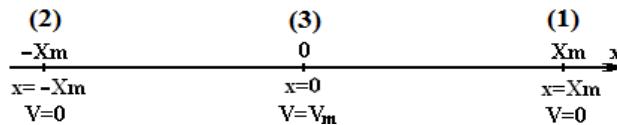
$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right) : \text{l'équation horaire } V_x = \dot{x}(t) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right)$$

: l'expression de la composante du vecteur vitesse  $V_x$  et  $\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \phi\right)$  sont opposées (ont des signes différents)

$$x_0 = x(0) = X_m \cdot \cos(\phi) \text{ d'où } \cos(\phi) = \frac{x(0)}{X_m} \text{ à l'instant } t=0 \quad V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\phi)$$

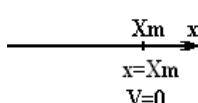
$V_x$  à l'instant  $t=0$  et  $\sin(\phi)$  sont opposées (ont des signes différents) On en conclut que  $V_x$  à l'instant  $t=0$  et  $\phi$  sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de  $V_x$  la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase  $\phi$



1<sup>er</sup> cas :

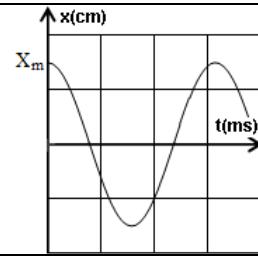
- On écarte le corps, dans le sens positif, de  $X_m$  de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



$$x(0) = X_m$$

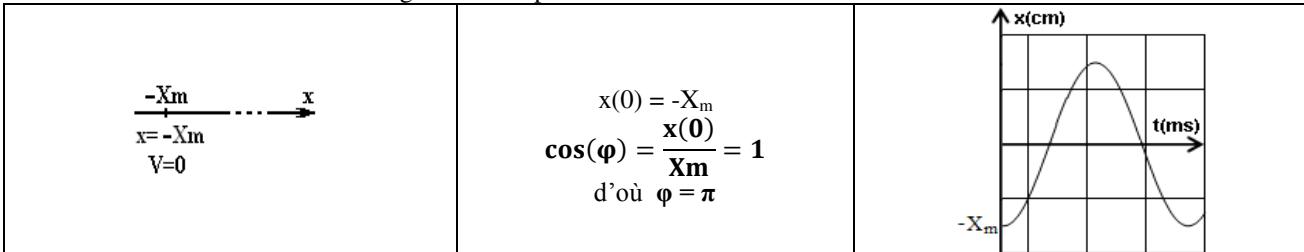
$$\cos(\phi) = \frac{x(0)}{X_m} = 1$$

$$\text{d'où } \phi = 0$$



## 2<sup>em</sup> cas :

- (2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de  $X_m$  de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps



## 4. Expression de la période propre $T_0$ :

$$x = x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) : \text{l'équation horaire}$$

On dérive deux fois par rapport au temps  $t$  :

$$\dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x \quad \ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle, on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle,

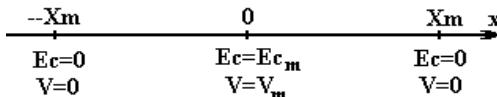
$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \text{il suffit que } \frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m} \quad \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}}$$

## I. Etude Energétique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

### 1. Energie cinétique :

$$x = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad V_x = -X_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad E_c = \frac{1}{2} m \cdot V^2$$



- Si  $x=X_m$  ou  $x=-X_m$  alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si  $x=0$  alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

### 2. Energie potentielle :

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

#### ❖ Energie potentielle élastique $E_p_e$

$$E_p_e = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta\ell^2 + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle  $E_p_e=0$

Si le pendule élastique est horizontal alors  $\Delta\ell = x$  alors

$$E_p_e = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C$$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique

$x=0$  et  $E_p_e=0$  d'où  $C=0$  alors

$$E_p_e = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

#### ❖ Energie potentielle de pesanteur $E_p_p$

$$E_p_p = m \cdot g \cdot Z + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle  $E_p_p=0$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique  $z=0$  et  $E_p_p=0$  d'où  $C=0$  alors

$$E_p_p = m \cdot g \cdot Z$$

#### NB :

Pour un pendule élastique horizontal  $E_p_p=0$

$$\text{Conclusion : } E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

$$\text{On a } x = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ alors } E_p = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

### 3. Expression de la variation de l'énergie potentielle :

$\Delta E_p_e$  : Variation de l'énergie potentielle élastique

$$\Delta E_p_e = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta\ell_2^2 - \Delta\ell_1^2) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{T})$$

$\Delta E_p_p$  : Variation de l'énergie potentielle de pesanteur

$$\Delta E_p_p = m \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{P})$$

## 4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,  $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C$$

Pour les conditions décrites avant on peut écrire  $E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$

## 5. Le cas du pendule élastique incliné ou vertical

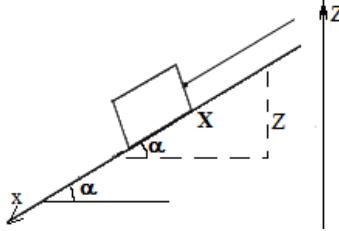
X : la distance que parcours le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$$Z = -X \cdot \sin(\alpha)$$

**NB :** si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie  
 $E_p = E_p(Z) = -m \cdot g \cdot Z + C$
- La relation entre abscisse varie aussi  
 $Z = X \cdot \sin(\alpha)$



$$E_p = E_p(Z) = m \cdot g \cdot Z + C$$

- Déterminer l'expression de la constante C
  - Déterminer le plan horizontal référentiel de l'énergie potentielle  $E_{p0}=0$
  - Déterminer l'abscisse correspondant  $Z_0$   
 $Z = Z_0$  et  $E_p(Z_0) = 0$

D'où

$$E_p(Z_0) = m \cdot g \cdot Z_0 + C = 0$$

donc

$$C = -m \cdot g \cdot Z_0$$

- On remplace C par son équivalent et on obtient alors

$$E_p = E_p(Z) = m \cdot g \cdot Z - m \cdot g \cdot Z_0$$

$$E_p = E_p(Z) = m \cdot g \cdot (Z - Z_0)$$

## Energie potentielle élastique

$$1. E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

Déterminer l'expression de  $\Delta \ell$  en fonction de x soit  $\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x$

- Déterminer la constante C

- Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle  $E_{pe0}=0$
- Déterminer l'abscisse correspondant  $x_0$   
 $x = x_0$  et  $E_{pe}(x_0) = 0$

$$\text{D'où } E_{pe}(x_0) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2$$

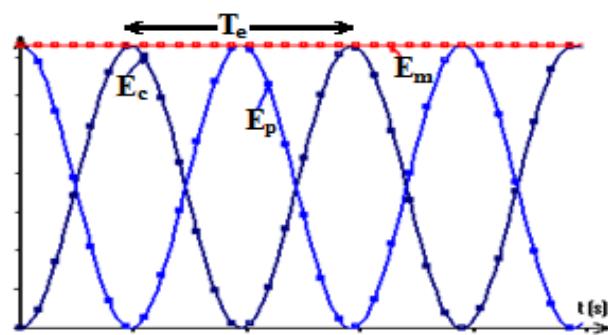
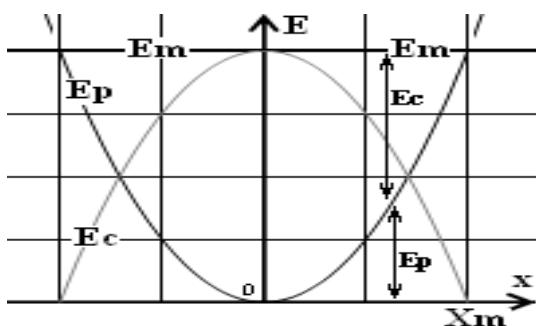
- Remplacer dans l'expression de  $E_{pe}$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x)^2 + C$$

## 6. Les graphes d'énergies :

- Au point  $x=X_m$  on a  $E_m=E_{pmax}$

- Au passage par la position d'équilibre  $x=0$  on a  $E_m=E_{cmax}$



$T_0 = 2 \cdot T_e$  : La période des oscillations  $T_0$  est le double de la période des énergies  $T_e$

### NB :

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps

