

Niveaux: SM PC

Matière: Physique

PROF: Zakaryae Chriki

Résumé N:17

Oscillateurs Mécaniques : Pendule de Torsion



## I. Pendule de Torsion

Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil métallique.

### 1. Le moment du couple de torsion

Le moment du couple de torsion qu'exerce un fil tordu est indépendant de l'axe de rotation, il a pour expression :  $\mathcal{M} = -C\theta$

$C$  : la constante de torsion du fil (N.m/rad)

$\theta$  : angle de torsion (rad)

$\mathcal{M}$  : moment du couple de torsion (N.m)

#### Remarques :

\* Le signe négatif signifie que le couple de torsion est un couple de rappel ;

\* La constante de torsion du fil dépend de la longueur du fil, de la section et de sa nature.

### 2. Equation différentielle :

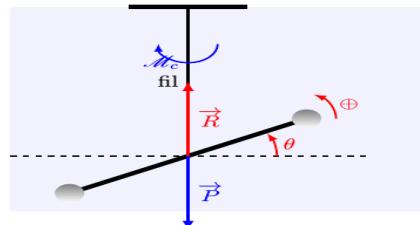
On étudie le mouvement du système dans un référentiel terrestre supposé Galiléen. On repère les positions de la tige à chaque instant par l'abscisse angulaire  $\theta(t)$  mesuré à partir de la direction de la tige à l'équilibre. (Direction de référence)

La tige est soumise à des forces suivantes :

\* le poids  $\vec{P}$

\* la force  $\vec{R}$  exercée par le fil

\* du couple de torsion de moment  $\mathcal{M}_c = -C\theta$



On applique la relation fondamentale de la dynamique de rotation au système :  $\Sigma \mathcal{M}_{\Delta} \overrightarrow{F_{ext}} = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_c = J_{\Delta} \ddot{\theta}$  Les droites d'actions de  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  sont confondues avec l'axe  $\Delta$ ; donc  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = 0$  et  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0$

$$-C\theta = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \cdot \theta = 0$$

C'est l'équation différentielle du mouvement du pendule .

En absence des frottements, l'abscisse angulaire de la tige d'un pendule de torsion libre, vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta}} \cdot \theta = 0$$

### 3. Equation horaire ou la solution de l'équation différentielle :

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0\right)$$

$\theta_m$  est l'amplitude des oscillations (rad),  $\phi_0$  est la phase à l'origine des dates (rad) et  $T_0$  la période propre du pendule de torsion .

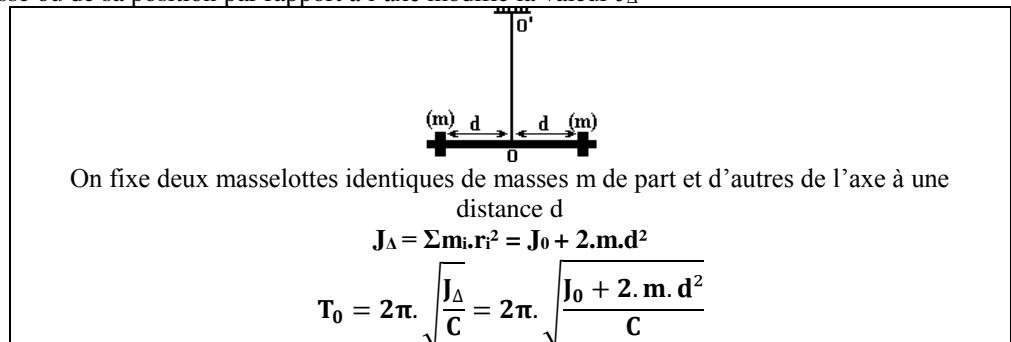
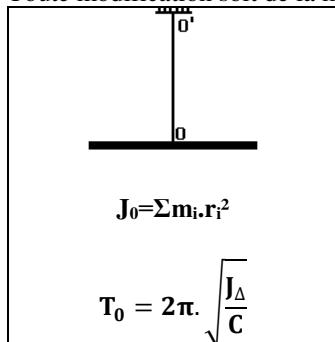
#### ❖ Expression de $T_0$ en fonction du moment d'inertie $J_{\Delta}$

$J_{\Delta} = \sum m_i \cdot r_i^2$  :

- Moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe ( $\Delta$ )
- Exprime la répartition de la matière autour de l'axe ( $\Delta$ )
- S'exprime en  $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$

#### NB :

Toute modification soit de la masse ou de sa position par rapport à l'axe modifie la valeur  $J_{\Delta}$



On fixe deux masselottes identiques de masses  $m$  de part et d'autre de l'axe à une distance  $d$

## \*\* Exploiter la courbe $T^2=f(m)$ ou $T^2=f(d^2)$

On a  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + 2.m.d^2}{C}}$  alors  $T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0}{C} + 8\pi^2 \cdot \frac{m.d^2}{C}$   $m=50\text{g}$  Masse de la masselotte

$T_0^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0}{C} + 8\pi^2 \cdot \frac{m.d^2}{C}$  La courbe  $T^2=f(d^2)$  est une fonction affine donc  $T^2 = A.d^2 + B$  avec :

- $A = 8\pi^2 \cdot \frac{m}{C} = \frac{\Delta T_0^2}{\Delta d^2} = \frac{0.36}{0.015} = 24 \text{ s}^2/\text{m}^2$ , on en déduit  $C$ ,  $C = 8\pi^2 \cdot \frac{m}{A}$
- $B = 4\pi^2 \cdot \frac{J_0}{C} = 0.24 \text{ s}^2$ , on en déduit  $J_0$ ,  $J_0 = \frac{B.C}{4\pi^2}$

## II. Etude Energétique

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

### 1. Energie cinétique :

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense. Soit  $J_\Delta$  le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et  $\theta$  est la vitesse angulaire de la tige à instant  $t$ . On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de  $\Delta$ , à cet instant  $t$  par l'expression suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\theta_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_\Delta \left( -\theta_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C (\theta_m^2 - \theta^2)$$

- Si  $\theta = \theta_m$  ou  $\theta = -\theta_m$  alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si  $\theta = 0$  alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

### 2. Energie potentielle de torsion

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est définie par la relation :  $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte$

Avec  $C$  la constante de la torsion du pendule,  $\theta$  angle de torsion en rad et  $Cte$  une constante qui dépend du choix de l'état de référence fourni par les conditions initiales. En générale, on prend  $E_{pt} = 0$  pour  $\theta = \theta_0 = 0$ ; soit  $Cte = 0$  d'où  $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$

$$E_{pt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \theta^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \left( \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \theta_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

### 3. Expression de la variation de l'énergie potentielle de torsion :

$$\Delta E_{pt} : \text{Variation de l'énergie potentielle de torsion} \quad \Delta E_{pt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (\theta_2^2 - \theta_1^2) = -W_{1 \rightarrow 2}(\mathcal{M}_c)$$

### 4. Energie mécanique :

On définit l'énergie mécanique d'un pendule de torsion par la relation suivante :

$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte$$

Dans le cas où  $Cte = 0$  on a alors :  $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2$

### 5. Diagramms d'énergie d'un pendule de torsion :

Lorsque la tige passe par sa position d'équilibre :  $\theta = 0$  et  $\dot{\theta} = \pm \dot{\theta}_m$  soit

$$E_{pt} = 0 \text{ et } E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^2$$

Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes :  $\theta = \pm \theta_m$  et  $\dot{\theta} = 0$

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta_m^2 \text{ et } E_c = 0$$

L'énergie mécanique d'un pendule de torsion libre et amorti se

$$\text{conserve : } E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_m^2 = Cte$$

