1. Quel est le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme ?

Étudions le mouvement d'un projectile dans une région de l'espace où le champ de pesanteur peut être considéré comme uniforme.

1.1 Étude expérimentale

Une bille est lancée avec une vitesse $\vec{\vartheta}_0$ faisant un angle α avec le plan horizontal. Étudions le mouvement de son centre d'inertie dans le référentiel terrestre.

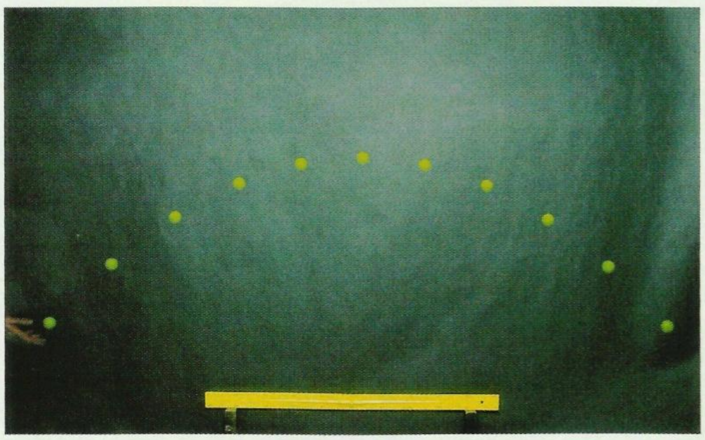
Activité 1

Quel est le mouvement d'une bille dans le champ de pesanteur ?

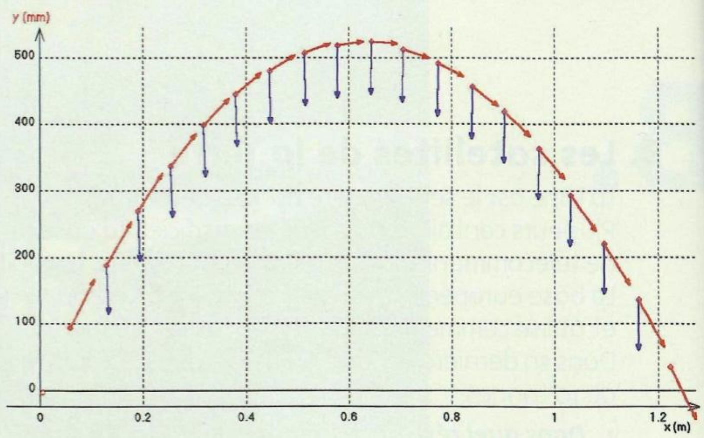
- Filmer une bille lancée dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée d'un caméscope *[Doc. 1]*.
- Analyser le film à l'aide d'un logiciel de traitement d'images.
- Faire tracer les vecteurs vitesse et accélération du centre d'inertie de la bille pour chacune de ses positions.

1. Au cours du mouvement, comment varie le vecteur vitesse ? le vecteur accélération ?

2. Comparer le vecteur accélération avec le vecteur $\vec{g}$ [Doc. 2].



Doc. 1 *Étude, image par image, d'une bille lancée dans le plan frontal du caméscope.*



Doc. 2 *Vecteurs vitesse (en rouge) et accélération (en bleu) au cours du mouvement.*

> Observation

Le vecteur vitesse du centre d'inertie de la bille change de valeur et d'orientation au cours du mouvement.

Le vecteur accélération est constant, vertical descendant.

Le vecteur accélération a la direction et le sens du vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ et sa valeur est de l'ordre de $10\ m\ .\ s^{-2}$.

> Interprétation

- Le système considéré est la bille.
- Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
- Une fois lancée, la bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à l'action de l'air que l'on peut négliger : **la chute est dite libre.**
- Appliquons la deuxième loi de Newton à la bille :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\ .\ \vec{a}_G.$$

Avec $\vec{P} = m\ .\ \vec{g}$, on a : $$\vec{a}_G = \vec{g}.$$

Lors de la chute libre d'un mobile, le vecteur accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie est égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$:

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

Ce résultat a déjà été établi au chapitre précédent lors de l'étude d'un mouvement de chute libre verticale.

1.2 Équations horaires

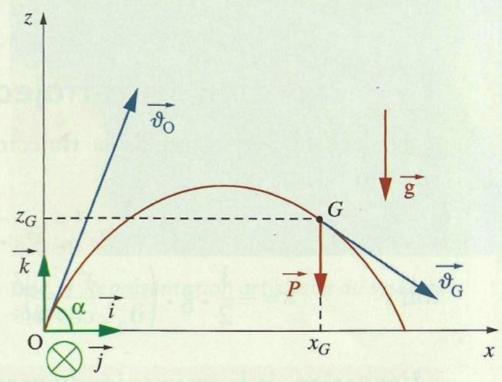
Déterminons les caractéristiques du mouvement du centre d'inertie G d'un projectile lancé avec une vitesse initiale non nulle. C'est le cas du mouvement de l'athlète lors d'un saut en longueur vu dans l'*Activité préparatoire A*, page 249. Pour cela, recherchons les équations horaires du mouvement.

Choisissons un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié au référentiel terrestre **[Doc. 3]** :

– le vecteur unitaire $\vec{k}$ est vertical ascendant ;

– le plan $(\vec{i}, \vec{k})$ contient le vecteur vitesse initiale $\vec{\vartheta}_0$. Notons α, l'angle $(\vec{i}, \vec{\vartheta}_0)$;

– l'origine O coïncide avec la position initiale du centre d'inertie G du projectile.



Doc. 3 *Trajectoire parabolique dans le cas d'une chute libre avec vitesse initiale.*

Dans ce repère et à la date $t = 0$, nous avons **[Doc. 4]** :

$$\overrightarrow{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\vartheta}_0 \begin{cases} \dot{x}_0 = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \\ \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z}_0 = \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

À une date t quelconque, G a pour coordonnées (x, y, z), sa vitesse $\vec{\vartheta}_G(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ et son accélération $\vec{a}_G(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ **[Doc. 3]**.

➤ Quelle que soit la date t, nous avons :

$$\vec{a}_G = \vec{g} \text{ et } \vec{g} = -\text{g} \cdot \vec{k} \text{ avec g} > 0.$$

Nous en déduisons les coordonnées de l'accélération $\vec{a}_G$ de G dans ce repère :

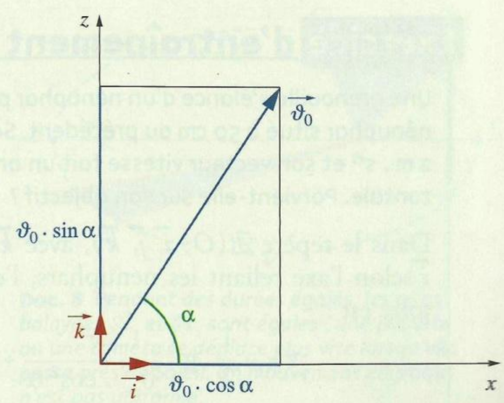
$$\vec{g} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\text{g} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a}_G \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -\text{g} \end{cases}$$

➤ Les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G$ sont des primitives des coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}_G$. Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$\vec{\vartheta}_G \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \\ \dot{y} = \dot{y}_0 = 0 \\ \dot{z} = -\text{g} \cdot t + \dot{z}_0 = -\text{g} \cdot t + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \end{cases}$$

➤ Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ sont des primitives des coordonnées du vecteur vitesse $\vec{\vartheta}_G$. Compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + x_0 = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = y_0 = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2} \cdot \text{g} \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot t + z_0 = -\dfrac{1}{2} \cdot \text{g} \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot t \end{cases}$$



Doc. 4 *Coordonnées du vecteur vitesse à l'instant initial : $\vec{\vartheta}_0 = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot \vec{k}$.*

Nous déduisons de ces équations horaires trois résultats importants :

- **$y = 0$: la trajectoire du centre d'inertie G est dans le plan vertical (xOz) contenant $\vec{\vartheta}_0$.**
- **$x = \vartheta_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$: le mouvement de la projection de G sur l'axe horizontal (Ox) est uniforme.**
- **$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot t$: le mouvement de la projection de G sur l'axe vertical (Oz) est uniformément accéléré.**

1.3 Équation de la trajectoire

• On établit l'équation de la trajectoire en éliminant le paramètre t des équations horaires :

$$t = \frac{x}{\vartheta_0 \cdot \cos\alpha}$$

soit : $$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{\vartheta_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \vartheta_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{\vartheta_0 \cdot \cos\alpha}$$

L'équation de la trajectoire du centre d'inertie d'un projectile est :

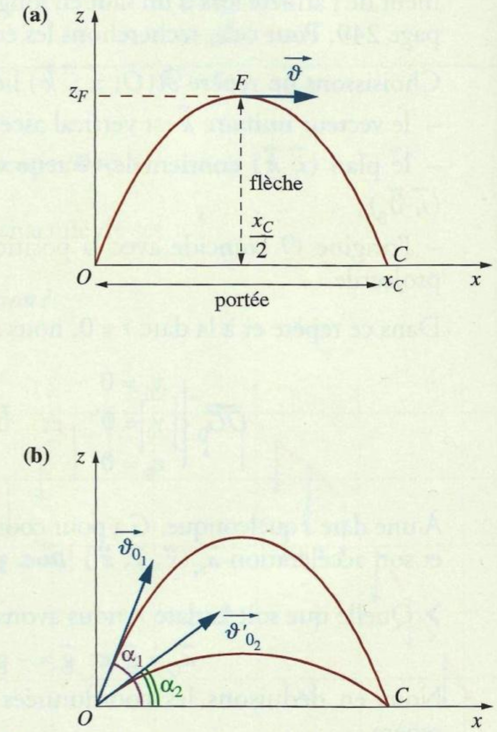
$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{\vartheta_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x$$

La trajectoire est une portion de parabole située dans le plan vertical contenant $\vec{\vartheta}_0$.

• La portée horizontale est la distance $d = OC$ **[Doc. 5a]** entre le point O de lancement et le point C de chute. On détermine $d = x_C$ pour $z_C = 0$.

La portée est la même pour deux angles de tir complémentaires (tir en cloche ou tir tendu) **[Doc. 5b]**. On démontre que la portée est maximale pour $\alpha = 45°$ (voir l'*exercice résolu* 1, page 263).

• La flèche est l'altitude maximale atteinte par G (position F). Au point F, le vecteur vitesse $\vec{\vartheta}$ est horizontal : $\dot{z}_F = 0$.



Doc. 5 *Trajectoires d'un projectile.*

Exercice d'entraînement 1

Une grenouille s'élance d'un nénuphar pour atteindre un autre nénuphar situé à 50 cm du précédent. Sa vitesse initiale est de 2 m . s^{-1} et son vecteur vitesse fait un angle $\alpha = 55°$ avec l'horizontale. Parvient-elle sur son objectif ?

Dans le repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\vec{k}$ vertical ascendant et $\vec{i}$ selon l'axe reliant les nénuphars, l'équation de la trajectoire est :

$$z = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{\vartheta_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot x.$$

La longueur du saut, obtenue pour $z = 0$, est :

$$x = \frac{2 \cdot \vartheta_0^{\,2} \cdot \cos^2\alpha \cdot \tan\alpha}{g} = \frac{2 \cdot \vartheta_0^{\,2} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g}.$$

La longueur du saut dépend de la valeur et de l'orientation du vecteur vitesse initiale (voir l'*Activité préparatoire A*, page 249).

Numériquement : $x = 0{,}38$ m. La grenouille tombe à l'eau !

> ***Pour s'entraîner : Ex. 1, 4, 5 et 7***