

Probabilités

I) Vocabulaires.

- **aléatoire** = Lié au hasard ; imprévisible ;arbitraire.
- On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si on peut déterminer parfaitement, par avance toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir par avance, laquelle de ces issues sera réalisée.
- **L'univers Ω** est l'ensemble de tous les résultats possibles.
Posons $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. (C'est-à-dire $\text{card}\Omega = n$)
- On appelle **événement** toute partie A de Ω .
- Un événement réduit à une seule issue $\{\omega_i\}$ est **un événement élémentaire**.
- Ω est appelé l'événement **certain**.
- \emptyset est appelée l'événement **impossible**.
- Si A et B désignent deux événements de Ω , l'événement $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des événements A et B est réalisé.
- L'événement $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont tous les deux réalisés.
- L'événement contraire d'un événement A , est \bar{A} constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A .

Exemple : Lancer un dé à 6 faces et noter le chiffre apparent sur la face supérieure, est une expérience aléatoire :

- Il y a 6 issues possibles.
- L'univers de cette expérience est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- A : « Le résultat est impair » est un événement qu'on peut exprimer en langage symbolique de la forme suivante $A = \{1; 3; 5\}$.
- B : « Le résultat est un multiple de 5 », est on peut écrire $B = \{5\}$. Donc B est un événement élémentaire, mais « 5 » est une issue possible et B est un ensemble qui contient cette seule issue.

II) Probabilité d'un événement.

Définition : Pour certaines expériences aléatoires, sous certaines conditions, on peut déterminer en pourcentage ou par un quotient « **la chance** » qu'un événement a pour ce réaliser. Ce **nombre** s'appelle la **probabilité** de l'événement.

- La probabilité d'un événement A d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
- Par exemple : Si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ et $A = \{\omega_2; \omega_5; \omega_8\}$ alors : $p(A) = p(\{\omega_2\}) + p(\{\omega_5\}) + p(\{\omega_8\})$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\emptyset) = 0$ et Pour tout événement A on a : $0 \leq p(A) \leq 1$

Propriétés

- Pour tous événements A et B on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Pour tous événements deux à deux **disjoints** ou **incompatibles** $A_1, A_2 \dots A_n$ on a :
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$
- Pour tout événement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

III) Equiprobabilité.

Définition : Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une situation d'equiprobabilité. Donc : si $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$

$$\text{Alors } p(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}\Omega} \quad ; \quad \text{c'est-à-dire pour tous événement } A \text{ on a : } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} .$$

Remarque : Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en général à des problèmes de **dénombrément**.

Exemple : On lance un dé **équilibré** (non truqué) dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement : A « le numéro de la face supérieure est multiple de 2 »

on a : $A = \{2, 4, 6\}$ donc $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

IV) Probabilité conditionnelle.

Définition : Soit B un événement de l'ensemble Ω , tel que $P(B) \neq 0$.

On définit sur Ω une nouvelle probabilité, notée P_B , en posant, pour tout événement A , $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On note $P_B(A) = P(A/B)$ qui se lit « **probabilité de A que B est réalisé** ».

Propriété : Soient A et B deux événements de l'ensemble Ω , tel que $P(B) \neq 0$.

Alors : $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

Définition : On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$.

Remarque : Ne pas confondre **indépendant** et **incompatible**

V) Probabilités totales.

1) **Arbre de probabilité :** C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

Remarque : Arbre probabiliste \neq Arbre à dénombrer

Exemple

Soit p une probabilité sur un univers Ω et A, B et C trois événements incompatibles et leur réunion est Ω

Soit un événement M , donc nous obtenons l'arbre probabiliste suivant :

Remarque : Un **arbre de probabilités** comporte des **nœuds** et des **branches**.

On applique les règles suivantes :

- la somme des probabilités marquées sur des branches issues d'un même nœud est égale à 1,
- la probabilité d'un événement qui correspond à un chemin est le produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement.

Donc :

$$\begin{aligned} p(M) &= p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C) \\ &= p_A(M) \times p(A) + p_B(M) \times p(B) + p_C(M) \times p(C) \end{aligned}$$

2) Formule des probabilités totales.

Théorème : Soit A_1, A_2, \dots, A_k , des événements de probabilité non nulle, réalisant une partition de l'univers Ω . Alors, pour tout événement B de ce même univers, on a :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_k) \\ &= p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots + p_{A_k}(B) \times p(A_k) \end{aligned}$$

Exercice : On considère trois urnes respectivement notées U_1, U_2 et U_3 . L'urne U_1 contient **une** boule rouge et **cinq** boules jaunes, l'urne U_2 contient **trois** boules rouges et **une** boule jaune, l'urne U_3 contient **une** boule rouge et **deux** boules jaunes.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

VI) Variables aléatoires.

Introduction : Une variable aléatoire est une variable dont la valeur est déterminée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire.

Activité : On lance **trois fois** de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne **2 points** pour chaque résultat « **Pile** » et on perd **1 point** pour chaque résultat « **Face** ».

L'ensemble des issues est $\Omega = \{\text{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}\}$ et il est de bon sens de choisir l'équiprobabilité sur Ω .

L'application $X : \Omega \rightarrow [0,1]$, qui, à chaque issue, associe le **gain** du joueur, prend les valeurs **-3, 0 3 et 6**.

Pour chaque valeur, on peut considérer l'événement $(X = 3) = \{\text{PPF, PFP, FPP}\}$ et lui associer sa probabilité $\frac{3}{8}$

On obtient ainsi une nouvelle **loi de probabilité** sur l'ensemble des gains : $X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$.

On la nomme **loi de X**.

gain x_i	$x_1 = -3$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$	$x_4 = 6$
$p(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Définition : soit X une variable aléatoire discrète, l'application p est dite loi de probabilité de X ,

définie par :
$$P : X(\Omega) \rightarrow [0,1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i)$$

Remarque : Si X est une variable aléatoire discrète et p sa loi de probabilité et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

Alors :
$$\sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$$

Esperance mathématique :

On appelle espérance mathématique de X le nombre, noté $E(X)$, définit par :
$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(X = x_i)$$

Variance et écart type :

- On appelle variance de X le nombre positif noté $V(X)$ suivant :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E(X^2) - E(X)^2$$

- On appelle écart type de X le nombre positif noté $\sigma(X)$ suivant :
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

VII) Loi Binomiale.

Définition : On réalise n fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : **succès** de probabilité p et **échec** de probabilité $(1-p)$.

Donc $(\forall k \in X(\Omega)); P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

X : nombre de succès obtenu est une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p .

Propriété :
Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p .
Alors :

$$X(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Quelques interprétations

- $E(X)$ est la **moyenne** des valeurs x_i , pondérées par les valeurs p_i .
- Dans le domaine des jeux (le terme « espérance » vient de là), $E(X)$ est le **gain moyen** que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.
Cela permet de qualifier un jeu d'équitable (ou honnête) lorsque $E(X) = 0$; lorsque $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur, il lui est défavorable si $E(X) < 0$.
- La variance et l'écart-type sont des paramètres de **dispersion**.