Resumé sur Les probabilités

Les probabilités

Définitions

Expérience aléatoire : protocole précis dont on ne peut prévoir l'issue (nombre fini d'issues) :

- Lancer un dé, tirer deux boules d'une urne, prendre un lycéen au hasard, etc.

Ω : **l'univers**, ensemble des n issues d'une expérience aléatoire.

- Pour un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A : **événement**, sous-ensemble de l'univers Ω.

- « obtenir un nombre supérieur à 3 avec un lancé de dé »

e_i : **événement élémentaire**, singleton de Ω.

- Il y a n événements élémentaires pour les n issues possibles d'une expérience.

$\varnothing$, **événement impossible** : « Obtenir un 7 avec un dé »

Probabilité et opérations logiques

Soit p une loi de probabilité sur Ω.

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

  On en déduit : $p(\varnothing) = p(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0$

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Opération sur les événements

- $\overline{A}$: « A barre », événement contraire à A (non A)
- $A \cap B$: « A inter B », événement dont les éléments sont les issues communes à A et B.

  Si $A \cap B = \varnothing$, les événements sont incompatibles
- $A \cup B$: « A union B », événement dont les éléments sont les issues de A ou (non exclusif) de B.

  $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$, les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω

Loi de probabilité

La loi de probabilité sur l'ensemble Ω est la fonction p à valeur dans $[0\,;1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = \sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$

Remarque : Définir une loi de probabilité revient à déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

⚠ Bien définir l'expérience et l'univers sur lequel on travaille (cf paradoxe du Duc de Toscane)

Règle sur un arbre pondéré

- Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes. ⚠ pas de pourcentage.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement.

Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance : $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Cas particulier : Si $E(X)$ représente un gain moyen, le jeu est équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X : on pose $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

La loi binomiale - Incontournable

- On reconnaît un schéma de Bernoulli lorsque l'on répète de manière identique et indépendante une expérience aléatoire dont on se préoccupe de deux événements : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $q = 1 - p$.
- Si l'on note X la variable aléatoire associée au nombre de succès sur ces n expériences, X suit une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Notations compactes possibles : $X \longrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

On retient : probabilité d'obtenir exactement k succès sur n expériences :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

(binomFdp(n, p, k) avec la calculatrice).

Dans ce cas : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Quelques cas courants : on suppose que $X \sim \mathscr{B}(n, p)$

- Au moins 1 succès : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$
- Au plus 1 succès : $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$
- Entre 30 et 45 succès : $p(30 \leqslant X \leqslant 45) = p(X \leqslant 45) - p(X \leqslant 29)$

  Pour calculer $p(X \leqslant k)$, on utilise la fonction de répartition de la loi binomiale. (binomFRép(n, p, k) avec la calculatrice).

Coefficients binomiaux

- Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient $\binom{n}{k}$ est appelé « coefficient binomial ».

  Il correspond au nombre de possibilités de placer k succès sur n expériences.

  Propriété : Les coefficients binomiaux sont symétriques

  $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \; : \text{ placer } k \text{ succès revient à placer } (n-k) \text{ échecs.}$$

  Deux cas particuliers : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

- **Triangle de Pascal** (1623-1662)

  On peut établir une liste de coefficients binomiaux grâce à la formule de Pascal :

  $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

  On obtient alors ce qu'on appelle le triangle de Pascal :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Démonstration :

Lorsque l'on veut placer $(k+1)$ succès sur $(n+1)$ expériences : $\binom{n+1}{k+1}$

— Soit on a un succès sur la 1re expérience, on doit alors placer k succès sur les n expériences restante : $\binom{n}{k}$

— Soit on a un échec sur la 1re expérience, on doit alors placer $(k+1)$ succès sur les n expériences restante : $\binom{n}{k+1}$