Géométrie analytique dans l'espace

1) Rappel

- La norme d'un vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif $\|\vec{u}\|=AB$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\overline{\vec{u},\vec{v}}\right)$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
- Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel. On a :
  - ✓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$; $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
  - ✓ $(\vec{u}\pm\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\pm2\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Dans tout le reste, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé .

Soient $\vec{u}(a;b;c)$; $\vec{v}(a';b';c')$ et $\vec{w}(a'';b'';c'')$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'$ et $\vec{u}\cdot\vec{u}=a^2+b^2+c^2=\|\vec{u}\|^2$ *donc* $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=a\begin{vmatrix}b' & b''\\ c' & c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a' & a''\\ c' & c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a' & a''\\ b' & b''\end{vmatrix}$.
- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ et $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Le système : $\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\quad/t\in IR\\ z=z_A+ct\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$.

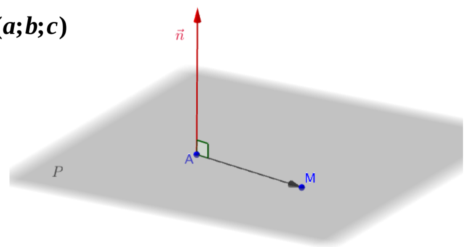
2) Plan et vecteur normal.

a) *Vecteur normal à un plan.*

Définition :Soit **(D)** une droite perpendiculaire à un plan **(P)**, tout vecteur non nul directeur de **(D)** est appelé vecteur **normal** à **(P)**.

b) *Equation d'une droite définie par un point A et un vecteur normal* $\vec{n}(a;b;c)$

Théorème : Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ est la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A.



- **Théorème** : soit $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur non nul avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. et d un nombre réel.
- Une droite admettant $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- Réciproquement : tout plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ admet $\vec{n}(a;b;c)$ comme vecteur normal.

Remarque :

- Deux plans dites orthogonales si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Deux plans dites parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

c) *Distance d'un point à un plan.*

Propriété: Considérons un point $A(x_A,y_A,z_A)$ et un plan $(P):ax+by+cz+d=0$

La **distance** du point A au plan (P) est: $d(A,(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

3) Sphère.

a) *Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.*

Sachant que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ qui vérifient $\Omega M = R \ (avec\ R>0)$ est une sphère de centre Ω et de rayon R. alors on en déduit la propriété suivante

Propriété : Le cercle de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R a pour équation : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

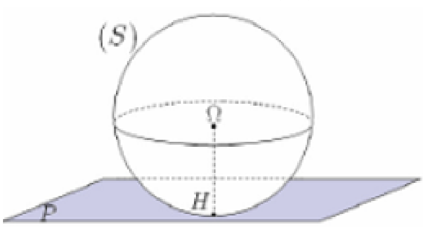
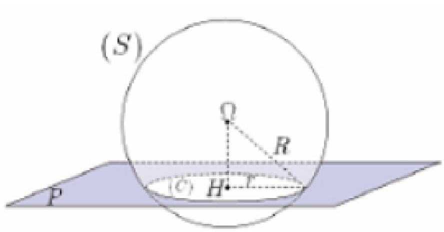
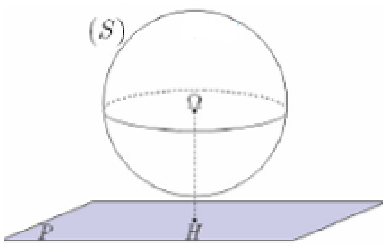
b) *Equation cartésienne d'une sphère défini par son diamètre.*

Propriété : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

Remarque : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

4) *Positions Relatives d'un plan et d'une sphère .*

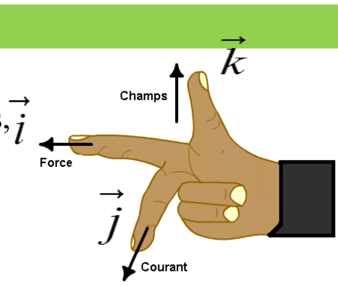
Pour étudier la position relative d'un plan (P) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R. Il suffit de comparer $d(\Omega,(P))$ au rayon R.

$d(\Omega,(P))=R$	$d(\Omega,(P))<R$	$d(\Omega,(P))>R$
Le plan (P) et la sphère (S) ont un seul point commun H, le projeté de Ω sur (P). On dit que le plan (P) est tangent à la sphère (S). 	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H, le projeté de Ω sur (P) et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}$ 	Le plan ne coupe pas la sphère 

5) *Produit vectoriel.*

a) *Orientation de l'espace.*

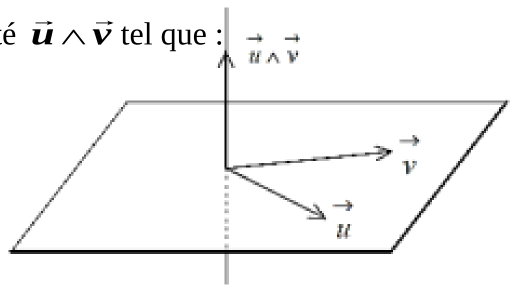
L'espace doit être **orienté** en adoptant le même point de vue qu'en sciences physiques, on peut notamment utiliser la règle des **trois doigts de la main droite** ou le « **bonhomme d'ampère** » :



On dit alors que le repère est de **sens direct**.

b) *Notation et définition.*

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :



Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

1) Direction : Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2) Le sens de $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit de sens direct.

3) Norme : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\left|\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)\right|$.

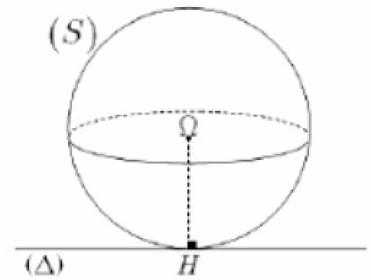
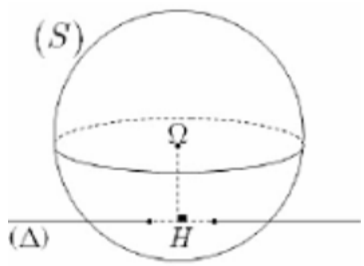
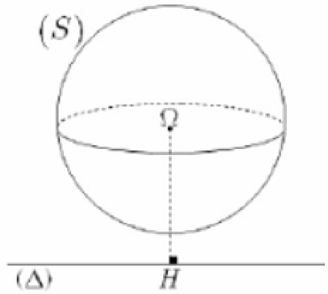
Remarque : Le produit *vectoriel* est un **vecteur,** alors que le produit *scalaire* est un **nombre**.

c) *Propriétés :* Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout nombre réel a,

- $(\vec{u}\wedge\vec{v})=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$ • $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ • $a(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{u}\wedge(a\vec{v})=(a\vec{u})\wedge\vec{v}$ • $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$
- Soient la droite $D(A;\vec{u})$ et le point M, alors $d(M;(D))=\dfrac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

d) *Positions relatives d'une droite et d'une sphère.*

Pour étudier la position relative d'une droite (D) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon ***R.*** Il suffit de comparer $d(\Omega,(D))$ au rayon ***R.***

$d(\Omega,(D)) = R$	$d(\Omega,(D)) < R$	$d(\Omega,(D)) > R$
La droite (D) est tangente à la sphère (S). 	La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents. 	La droite (D) ne coupe pas la sphère (S) 

Propriété : L'**aire du triangle** *ABC* est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$