



I. Approche :

- f est une fonction ; on la note par y .
- f' est sa dérivée ; on la note par y' .
- L'écriture $f'(x) = af(x) + b$ on la note par $y' = ay + b$ on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant a et b .
- Toute fonction g dérivable qui vérifie cette équation différentielle ($g'(x) = ag(x) + b$) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle .
- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale) .
- Le programme se limite aux équations différentielles de la formes .

1. $y' = ay + b$ avec a et b de \mathbb{R}

2. $y'' + ay' + by = 0$ avec a et b de \mathbb{R} .

II. Equation différentielle de la forme $y' = ay + b$ a et b de \mathbb{R} :

a. Propriété :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ a et b de \mathbb{R} .

- **Cas général $a \neq 0$** : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Cas particulier 1** : $a = 0$ et $b = 0$ l'équation (E) est $y' = 0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la $f(x) = c$.
- **Cas particulier 2** : $a = 0$ et $b \neq 0$ l'équation (E) est $y' = b$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la $f(x) = bx + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. Exemples :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 4y + 5$ donc $a = 4$ et $b = 5$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont

les fonctions de la forme : $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a} = \alpha e^{4x} - \frac{5}{4}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $y' = -3y$ donc $a = -3$ et $b = 0$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont

les fonctions de la forme : $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a} = \alpha e^{-3x} - \frac{0}{-3} = \alpha e^{-3x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $y' = 7$ donc $a = 0$ et $b = 7$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x) = bx + \alpha = 7x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. $y' = 0$ donc $a = 0$ et $b = 0$ d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

**c. Propriété :**

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ $a \neq 0$ et b de \mathbb{R} .

Il existe une et une seule fonction $f(x)$ qui est solution de l'équation (E) et qui vérifie la condition initiale $f(x_0) = y_0$ avec x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}$.

d. Exemple :

Déterminer la solution $f(x)$ de l'équation différentielle (E) : $y' = 4y + 5$ qui vérifie la condition initiale

$$f(-7) = 11$$

- D'après l'exemple précédent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme : $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a} = \alpha e^{4x} - \frac{5}{4}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- On détermine fonction qui vérifie la condition initiale $f(-7) = 11$. on a :

$$f(-7) = 11 \Leftrightarrow \alpha e^{4 \times (-7)} - \frac{5}{4} = 11$$

$$\Leftrightarrow \alpha e^{-28} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{49}{e^{-28}} = 49e^{28}$$

On remarque que : $\alpha = 49e^{28}$ est un nombre réel unique d'où il existe une fonction unique tel que

$$f(-7) = 11 \text{ c'est la fonction } f(x) = 49e^{28} \times e^{4x} - \frac{5}{4} = 49e^{4x+28} - \frac{5}{4} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

III. Equation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ a et b de \mathbb{R} :**a. Définition :**

- Equation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ a et b de \mathbb{R} tel que l'inconnue c'est la fonction y avec y' sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde s'appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant sans seconde membre.
- L'équation $r \in \mathbb{C} : r^2 + ar + b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de l'équation : $y'' + ay' + by = 0$
- Le nombre $\Delta = a^2 - 4b$ s'appelle le discriminant de l'équation caractéristique.

b. Propriété :

solution générale de l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$ a et b de \mathbb{R} dépend du signe de Δ .

1^{er} cas : $\Delta > 0$:

Donc l'équation caractéristique a deux solutions réelles sont : r_1 et r_2 . D'où la solution générale de (E)

sont les fonctions de la forme : $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$; α et β de \mathbb{R} .



• 2^{ème} cas : $\Delta = 0$

Donc l'équation caractéristique a une solution réelle est r_1 . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme : sont les fonctions de la forme : $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}$; α et β de \mathbb{R} .

• 3^{ème} cas : $\Delta < 0$:

Donc l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées sont : $r_1 = p + qi$ et

$r_2 = \bar{r}_1 = p - qi$. D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme :

$f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$; α et β de \mathbb{R} .

c. Exemples :

1. Résoudre l'équation différentielle (E): $y'' - 5y' + 6y = 0$.

- L'équation caractéristique de (E) est : $r \in \mathbb{C} : r^2 - 5r + 6 = 0$.
- On a $\Delta = a^2 - 4b = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1 > 0$ d'où l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions réelles distinctes sont $r_1 = 2$, $r_2 = 3$.
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ avec α et β de \mathbb{R}

2. Résoudre l'équation différentielle (E): $y'' + y' + y = 0$.

- L'équation caractéristique de (E) est : $r \in \mathbb{C} : r^2 + r + 1 = 0$.
- On a $\Delta = a^2 - 4b = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$ d'où l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions complexes conjuguées sont $r_2 = \bar{r}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$, $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$.
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la

forme $f(x) = f(x) = \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{\frac{-1}{2}x}$ avec α et β de \mathbb{R} .

3. Résoudre l'équation différentielle (E): $y'' - 4y' + 4 = 0$.

- L'équation caractéristique de (E) est : $r \in \mathbb{C} : r^2 - 4r + 4 = 0$. (on a $r \in \mathbb{C} : (r - 2)^2 = 0$)
- On a $\Delta = a^2 - 4b = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$ d'où l'équation caractéristique de (E) admet une seule solution réelle est $r_1 = 2$.
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$ avec α et β de \mathbb{R}