



## I. Approche :

- $f$  est une fonction ; on la note par  $y$  .
- $f'$  est sa dérivée ; on la note par  $y'$  .
- L'écriture  $f'(x) = af(x) + b$  on la note par  $y' = ay + b$  on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant  $a$  et  $b$  .
- Toute fonction  $g$  dérivable qui vérifie cette équation différentielle ( $g'(x) = ag(x) + b$ ) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle .
- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale) .
- Le programme se limite aux équations différentielles de la formes .
  1.  $y' = ay + b$  avec  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$
  2.  $y'' + ay' + by = 0$  avec  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  .

## II. Equation différentielle de la forme $y' = ay + b$ a et b de $\mathbb{R}$ :

### a. Propriété :

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$  a et b de  $\mathbb{R}$ .

- Cas général  $a \neq 0$  : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :  $f(x) = \alpha \times e^{ax} - \frac{b}{a}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  .
- Cas particulier 1 :  $a = 0$  et  $b = 0$  l'équation (E) est  $y' = 0$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la  $f(x) = c$  .
- Cas particulier 2 :  $a = 0$  et  $b \neq 0$  l'équation (E) est  $y' = b$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la  $f(x) = bx + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  .

### b. Exemples :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y' = 4y + 5$  donc  $a = 4$  et  $b = 5$  d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :  $f(x) = \alpha \times e^{4x} - \frac{5}{4} = \alpha e^{4x} - \frac{5}{4}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  .
2.  $y' = -3y$  donc  $a = -3$  et  $b = 0$  d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :  $f(x) = \alpha \times e^{-3x} - \frac{0}{4} = \alpha e^{-3x}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  .
3.  $y' = 7$  donc  $a = 0$  et  $b = 7$  d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :  $f(x) = bx + \alpha = 7x + \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  .
4.  $y' = 0$  donc  $a = 0$  et  $b = 0$  d'où : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :  $f(x) = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  .



c. Propriété :

- L'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$   $a \neq 0$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .

Il existe une et une seule fonction  $f(x)$  qui est solution de l'équation (E) et qui vérifie la condition initiale  $f(x_0) = y_0$  avec  $x_0$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

d. Exemple :

Déterminer la solution  $f(x)$  de l'équation différentielle (E) :  $y' = 4y + 5$  qui vérifie la condition initiale  $f(-7) = 11$

D'après l'exemple précédent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :  $f(x) = \alpha \times e^{4x} - \frac{5}{4}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On détermine fonction qui vérifie la condition initiale  $f(-7) = 11$ . On a :

$$f(-7) = 11 \Leftrightarrow \alpha e^{4 \times (-7)} - \frac{5}{4} = 11$$

$$\Leftrightarrow \alpha e^{-28} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{49}{e^{-28}} = 49e^{28}$$

On remarque que :  $\alpha = 49e^{28}$  est un nombre réel unique d'où il existe une fonction unique tel que

$$f(-7) = 11 \text{ c'est la fonction } f(x) = 49e^{28} \times e^{4x} - \frac{5}{4} = 49e^{4x+28} - \frac{5}{4} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

### III. Equation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$ a et b de $\mathbb{R}$ :

a. Définition :

- Equation différentielle de la forme  $y'' + ay' + by = 0$  a et b de  $\mathbb{R}$  tel que l'inconnue c'est la fonction y avec y sa dérivée première et y'' sa dérivée seconde s'appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant sans seconde membre.
- L'équation  $r \in \mathbb{C} : r^2 + ar + b = 0$  s'appelle l'équation caractéristique de l'équation :  $y'' + ay' + by = 0$
- Le nombre  $\Delta = a^2 - 4b$  s'appelle le discriminant de l'équation caractéristique .

b. Propriété :

solution générale de l'équation différentielle (E) :  $y'' + ay' + by = 0$  a et b de  $\mathbb{R}$  dépend du signe de  $\Delta$ .

• 1<sup>er</sup> cas :  $\Delta > 0$  :

Donc l'équation caractéristique a deux solutions réelles sont :  $r_1$  et  $r_2$ . D'où la solution générale de (E)

sont les fonctions de la forme :  $y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .



• **2<sup>er</sup> cas :  $\Delta = 0$**

Donc l'équation caractéristique a une solution réelle est  $r_1$ . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme : sont les fonctions de la forme :  $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{r_1 x}$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .

• **3<sup>ième</sup> cas :  $\Delta < 0$  :**

Donc l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées sont :  $r_1 = p + qi$  et  $r_2 = \bar{r}_1 = p - qi$ . D'où la solution générale de (E) sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}; \alpha \text{ et } \beta \text{ de } \mathbb{R}.$$

**c. Exemples :**

**1. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .**

- L'équation caractéristique de (E) est :  $r \in \mathbb{C} : r^2 - 5r + 6 = 0$ .
- On a  $\Delta = a^2 - 4b = (-5)^2 - 4 \times 6 = 1 > 0$  d'où l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions réelles distinctes sont  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 3$ .
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme  $f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .

**2. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' + y' + y = 0$ .**

- L'équation caractéristique de (E) est :  $r \in \mathbb{C} : r^2 + r + 1 = 0$ .
- On a  $\Delta = a^2 - 4b = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$  d'où l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions complexes conjuguées sont  $r_2 = \bar{r}_1 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = j$ ,  $r_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = j$ .
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme  $f(x) = f(x) = \left( \alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{1}{2}x}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .

**3. Résoudre l'équation différentielle (E) :  $y'' - 4y' + 4 = 0$ .**

- L'équation caractéristique de (E) est :  $r \in \mathbb{C} : r^2 - 4r + 4 = 0$ . (on a  $r \in \mathbb{C} : (r - 2)^2 = 0$ )
- On a  $\Delta = a^2 - 4b = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$  d'où l'équation caractéristique de (E) admet une seule solution réelle est  $r_1 = 2$ .
- Ensemble des solutions de l'équation (E) sont les fonctions de la forme  $f(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .