Benmoussa Mohammed

1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^9 (5x+8)dx$ et $\int_0^1 (2x+3)^4 dx$ et $\int_0^1 x(4x^2+2)^3 dx$
2. $\int_1^5 |x-2|dx$ et $\int_0^2 |(x-1)(x-3)|dx$ et $\int_0^{\pi} |\cos x|dx$
3. $\int_1^3 -\frac{1}{x^2}dx$ et $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ et $\int_1^3 \frac{1}{x+2}dx$ et $\int_2^3 \frac{2x+2}{x^2+2x}dx$
4. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_1^2 \sqrt[4]{x}dx$ et $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$
5. ..
   a. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin(5x)dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\sin(3x)+5\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx$ et $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{(2+\cos t)^2}dt$
   b. $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos 2x dx$ et $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cos^4 x dx$ et $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$(remarquer $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x$)
6. . $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx$ et $\int_1^e \frac{1}{x}(1+\ln x)dx$ et $A=\int_1^{e-1} \frac{1}{(1+x)\ln^2(x+1)}dx$
7. $\int_0^1 e^{-x}dx$ et $\int_0^1 e^{5x}dx$ et $\int_0^1 e^x(e^{-4x}+e^{2x})dx$ (bac2016) et $\int_0^{\ln(2)} \frac{3e^x}{e^x+2}dx$ et $\int_{-1}^1 xe^{x^2}dx$ et

   $A=\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{5x}+2e^x-2}{e^x}dx$

2.

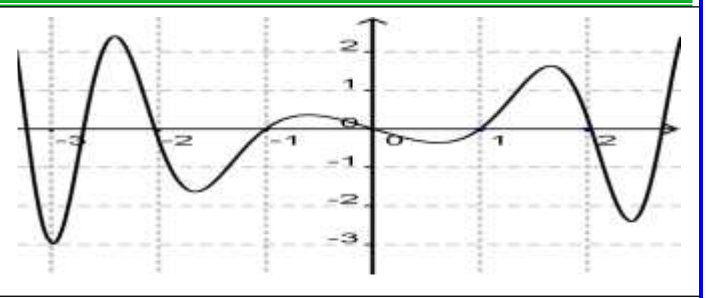
Déterminer le réel $\lambda > -3$ tel que : $\int_0^{\lambda} (x+3)dx = -4$.

3.

1. Déterminer $f(c)$ la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I pour chaque suivant :
   a. $I=[1,3]$ et $f(x)=x+1$ puis donner interprétation géométrique du nombre $2\times f(c)$
   b. $I=[-1,2]$ et $f(x)=x^3+2x$ puis donner interprétation géométrique du nombre $3\times f(c)$

4.

La figure suivante représente la courbe représentative d'une fonction définie et paire sur intervalle I .



1. Déterminer le signe de chaque intégrale suivante

   $A_1=\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ et $A_2=\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

   $A_3=\int_0^1 f(x)dx$ et $A_3=\int_0^1 f(x)dx$
2. Donner la valeur de l'intégrale : $A_5=\int_{-1}^1 f(x)dx$

5.

1. Calculer chaque intégrale suivante en utilisant une intégration par parties :

a. $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)dx$, puis en déduire une fonction primitive de la fonction $f(x)=x\cos(2x)$

b. $B=\int_1^{e}\ln(x)dx$, puis en déduire une fonction primitive de la fonction $f(x)=\ln(x)$

c. $C=\int_0^{1} xe^x dx$, , puis en déduire une fonction primitive de la fonction $f(x)=xe^x$

2. Calculer chaque intégrale suivante en utilisant une double intégration par parties :

a. $E=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$.

b. $F=\int_1^{e}\ln^2(x)dx$.

c. $G=\int_0^{1} x^2e^x dx$.

6.

1. Vérifier que : $H : x\mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x\mapsto\sqrt{3x+1}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante : $\int_0^{1}\sqrt{3x+1}dx$.

7.

1. Déterminer a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $\frac{5x+2}{x-6}=a+\frac{b}{x-6}$ (avec $x\neq 6$)

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_1^{3}\frac{5x+2}{x-6}dx$.

8.

A l'aide d'une intégration par parties calculer :

1. $A=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos 3x dx$.

2. $B=\int_1^{\lambda}\ln(x-2)dx$ tel que : $\lambda>2$.

9.

On pose : $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$.

1. Calculer les intégrales suivantes : $I+J$ puis $I-3J$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : I et J .

10.

On pose : $I=\int_0^{1}\frac{4x^4}{x^5+4}dx$ et $J=\int_0^{1}\frac{x^9}{x^5+4}dx$.

1. Calculer la valeur de l'intégrale I puis $I+J$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale J .

11.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que : $\forall t\in[0;1]:\frac{t}{2}\leq\frac{t}{1+t^2}\leq t$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt$ puis $\ln 2$.

12.

1. Donner une linéarisation de : $f(x)=\sin^2 x$ puis en déduire une fonction primitive de f .
2. Calculer : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx$.
3. Calculer : $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin^2 x dx$.

13.

1. Ecrire la fonction suivante $g(x)=x\sqrt{x^2+1}$ sous la forme $af'(x)f(x)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et f est une fonction convenable à choisir .
2. Calculer : $\int_{-1}^{1}x\sqrt{x^2+1}dx$.

14.

1. Ecrire la fonction suivante $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sous la forme $af'(x)f(x)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et f est une fonction convenable à choisir .
2. Calculer : $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

15.

On considère les deux intégrales suivantes : $A=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ et $B=\int_0^{\ln 2}e^x\ln(e^x+1)dx$.

1. ..
   a. Vérifier que : $e^x-1+\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$.
   b. Donner la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}}{e^x+1}\right)$.
2. ..
   a. Calculer l'intégrale A .
   b. A l'aide d'une intégration par parties , calculer B

16.

1. Déterminer les réels a et b tel que : $\frac{x-2}{x+4}=a+\frac{b}{x+4}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

2. Calculer : $\int_{-1}^{1}\frac{x-2}{x+4}dx$.

17.

1. Vérifier que : $\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. Calculer l'intégrale suivante : $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x+1}dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $A=\int_{0}^{1}x\ln(x+1)dx$.

18.

1. Vérifier que : $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

2. Calculer les intégrales suivantes : $A=\int_{1}^{2}\frac{x}{x^2+1}dx$ et $B=\int_{1}^{2}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$ et $C=\int_{1}^{2}\frac{x}{x(x^2+1)}dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $D=\int_{1}^{2}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$.

19.

1. Vérifier que : $\frac{2x^2+3x+2}{x+1}=2x+1+\frac{1}{x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante : $A=\int_{0}^{1}\frac{2x^2+3x+2}{x+1}dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $B=\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$.

4. Calculer les intégrales suivantes : $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$ et $\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$

20.

1. ..
   a. Développer : $x(x-2)(+2)$.
   b. Déterminer les réels a et b et c tel que : $\frac{3x+1}{x^3-4x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+2}$.

2. Calculer : $\int_{1}^{3}\frac{3x+1}{x^3-4x}dx$.

21.

1. Calculer : $A=\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{2e^x-3}{e^x+2e^{-x}-3}dx$ et $B=\int_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{x}dx$ et

2. A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que : $\int_1^0 \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\frac{\pi-2}{8}$.

22.

1. Montrer que : $\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=e^{-x}-1+\frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer : l'intégrale : $A=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer : $B=\int_0^{\ln 2}e^{-x}\ln\left(1+e^{-x}\right)dx$.

23.

1. Calculer les intégrales suivantes : $A=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$ et $B=\int_{-1}^{1}\left|e^x-1\right|dx$.

2. ..

- **a.** Vérifier que $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$, avec $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.
- **b.** Calculer l'intégrale suivante : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$.

3. A l'aide d'une double intégration par parties calculer : $A=\int_1^e\cos\left(\pi\ln x\right)dx$

24.

On considère les deux intégrales suivantes : $A=\int_0^{e^\pi}\sin\left(\ln x\right)dx$ et $B=\int_0^{e^\pi}\cos\left(\ln x\right)dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que : $A=-B$ (on pourra poser $u\left(x\right)=\sin\left(\ln x\right)$ et $v'\left(x\right)=1$.

2. ..

- **a.** A l'aide d'une intégration par parties , montrer que : $B=-e^\pi-1+A$.
- **b.** En déduire les valeurs de A et B .

25.

1. ..

- **a.** Calculer la fonction dérivée de $f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.
- **b.** Montrer que : $A=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

2. ..

- **a.** On pose $B=\int_0^2\sqrt{x^2+2}dx$ et $C=\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$. Montrer que : $2A=B-C$
- **b.** A l'aide d'une intégration par parties montrer que $B+C=2\sqrt{6}$.

c. En déduire les valeurs de A et B.

26.

1. ..
   a. Linéariser : $\sin^3 x$, en déduire que $\sin^3 x = \frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$.
   b. Calculer l'intégrale suivante : $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin^3 x dx$
2. On pose : $B = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^3 x dx$
   a. Calculer : $A + B$
   b. En déduire la valeur de B.
3. On considère l'équation différentielle : $(E) : y' + 2y + 1 = 0$
4. déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie : $2\int_0^{\ln 2} g(x)dx = 3 + \ln 2$.

27.

On considère $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_0 = \int_1^e x\ln x dx$ et $u_n = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1. A l'aide d'une intégration par parties calculer u_0
2. A l'aide d'une intégration par parties calculer u_1.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.
4. ..
   a. Montrer que : la suite (u_n) est décroissante.
   b. En déduire que : la suite (u_n) est convergente.
5. ..
   a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $2u_{n+1} + (n+2)u_n = e^2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   b. En déduire la valeur u_2.
6. ..
   a. Montrer que : $u_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
   b. En déduire la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

28.

On pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. A l'aide d'une intégration par parties calculer : I_1.
2. ..

a. Montrer que : $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b. En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

c. Calculer : l'intégrale suivante $I_n = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x}dx$.

3. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Montrer que : la suite (I_n) est décroissante .

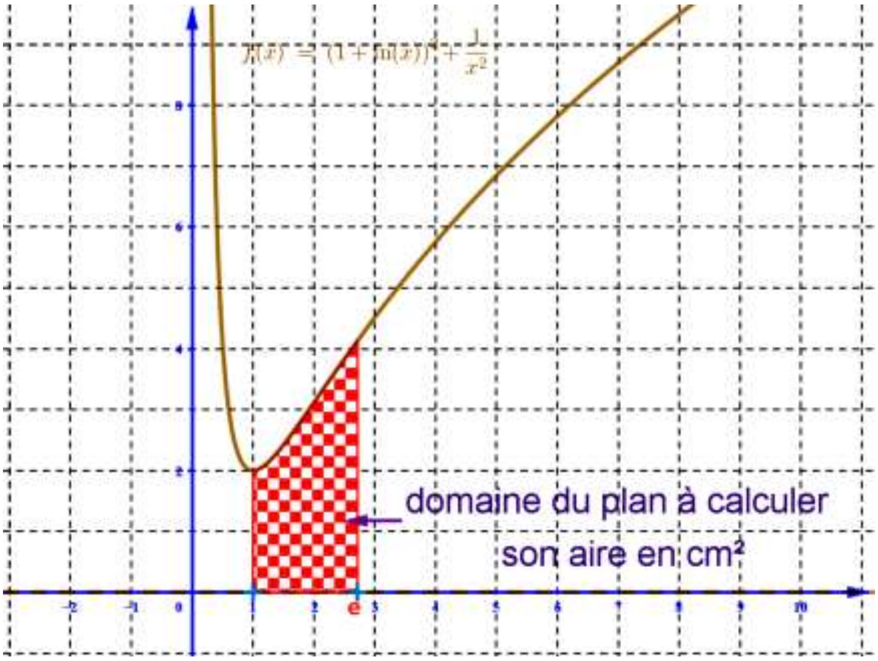
b. Montrer que : la suite (I_n) est minorée par 0 .

c. En déduire que : : la suite (I_n) est convergente .

4. ..Montrer que : $I_n \le \frac{1}{n+1}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ .En déduire : $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

29. Bac 2014 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .



1. On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1+\ln x)dx$ et $J = \int_1^e (1+\ln x)^2 dx$.

a. Montrer que $H : x \mapsto x\ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$ puis en déduire que $I = e$ . ... (0,5)

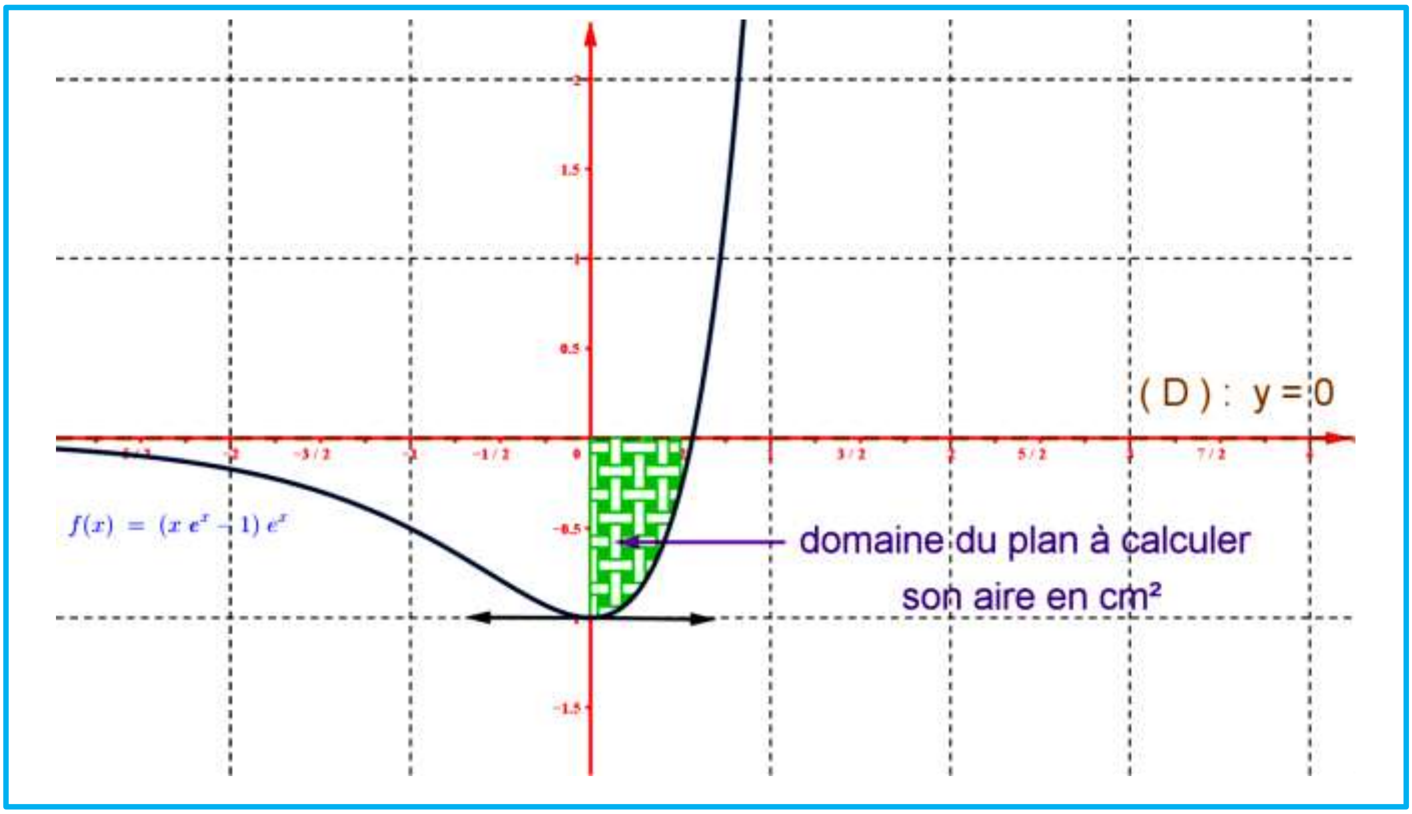
b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $J = 2e - 1$. .... (0,5)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ . ... (0,5)

30. Bac 2014 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\left(xe^{x}-1\right)e^{x}$.

et soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité de 2 cm) .



1. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$ . ... (0,75)

2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe $\left(C_f\right)$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{1}{2}$ . ... (1)

31. Session 2015 session normale (fuite الذي تم تسريبه)

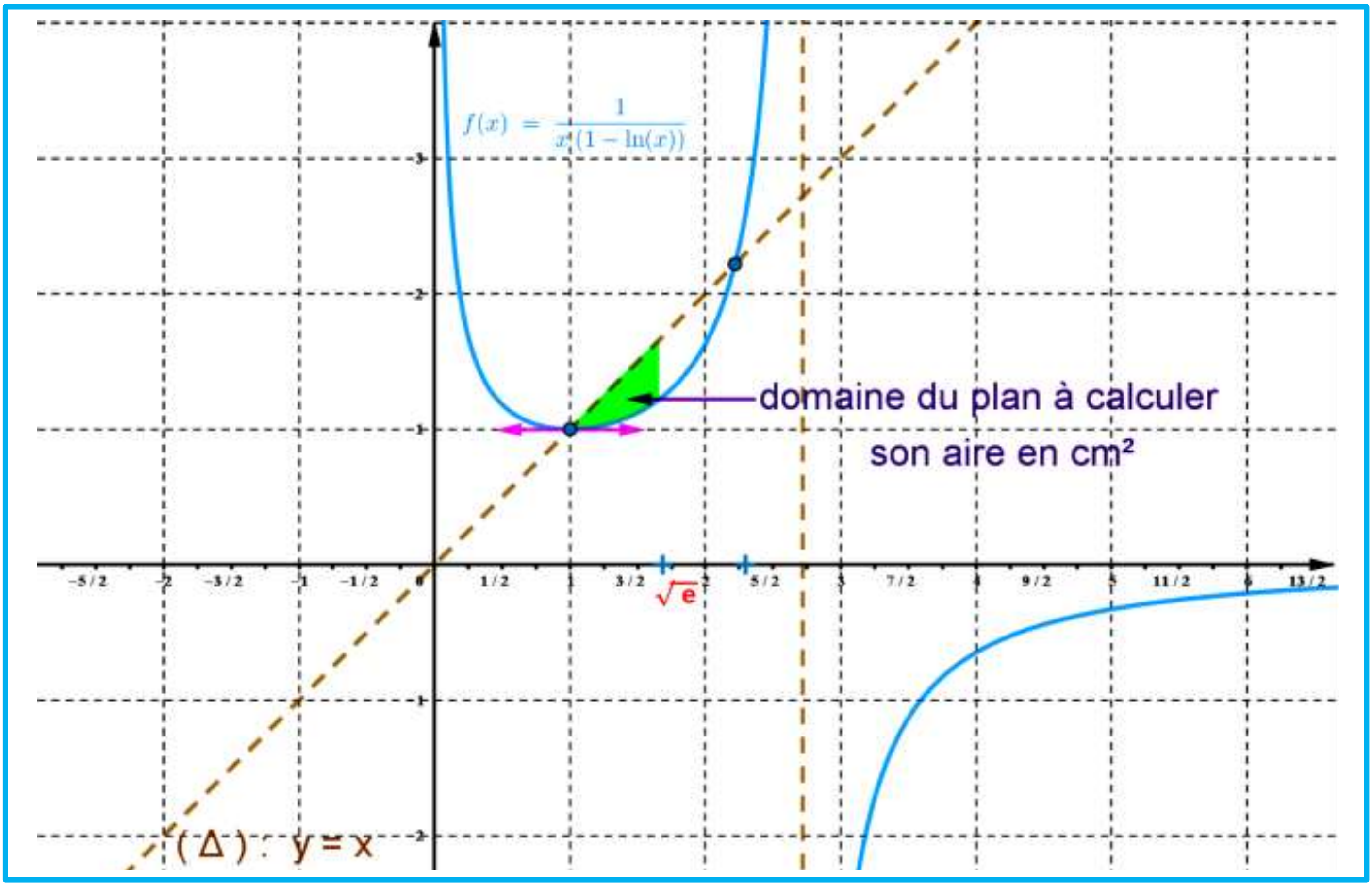
On considère la fonction numérique f définie sur $D_f=\left]0;e\right[\cup\left]e;+\infty\right[$ par : $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$,

Soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité de 2 cm) . (voir la figure après les questions)

1.

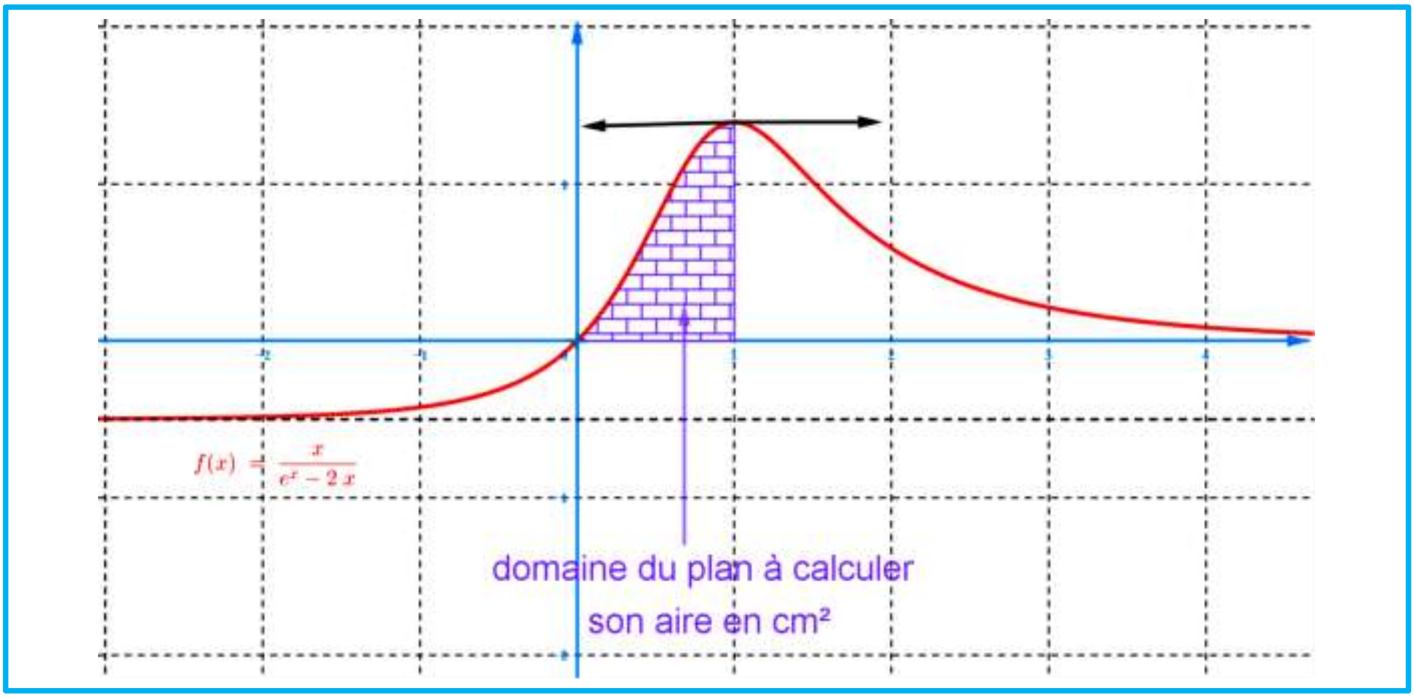
a. Montrer que : $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (on remarque $\frac{1}{x(1-\ln x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ pour tout x de D_f) .
.... (0,75)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe $\left(C_f\right)$ et la droite (Δ) d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$ . ... (0,75)



32. Bac 2015 session normale (sujet qui a été refait)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) . (voir la figure après les questions)



1. ..

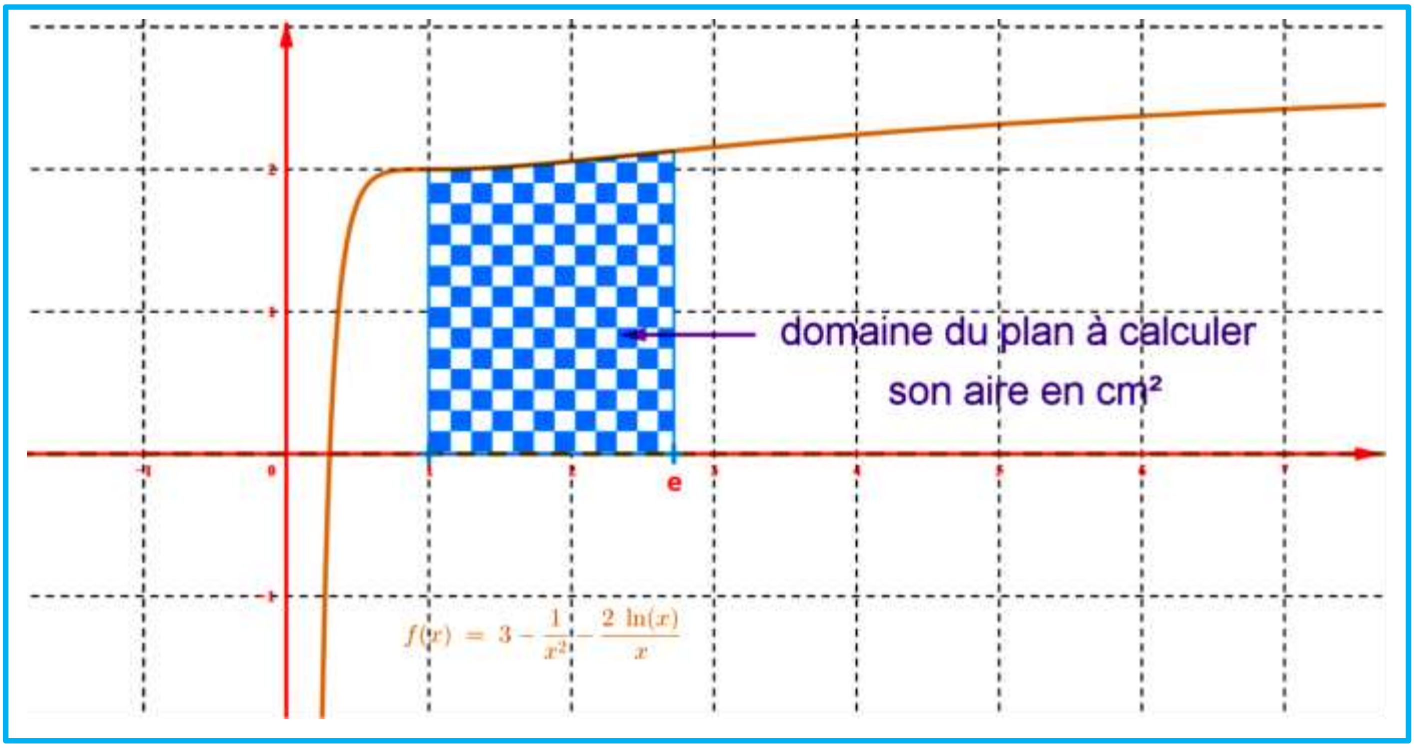
a. Montrer que : $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0,+\infty[$ . ... (0,75)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$. .... (0,75)

c. Soit en cm^2 $A(E)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. montrer que $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$ .... (0,75)

33. Bac 2015 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $D =]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm) .



1. ..

a. Montrer que : $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$. .... (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ . ... (0,75)

34. Bac 2016 session normale

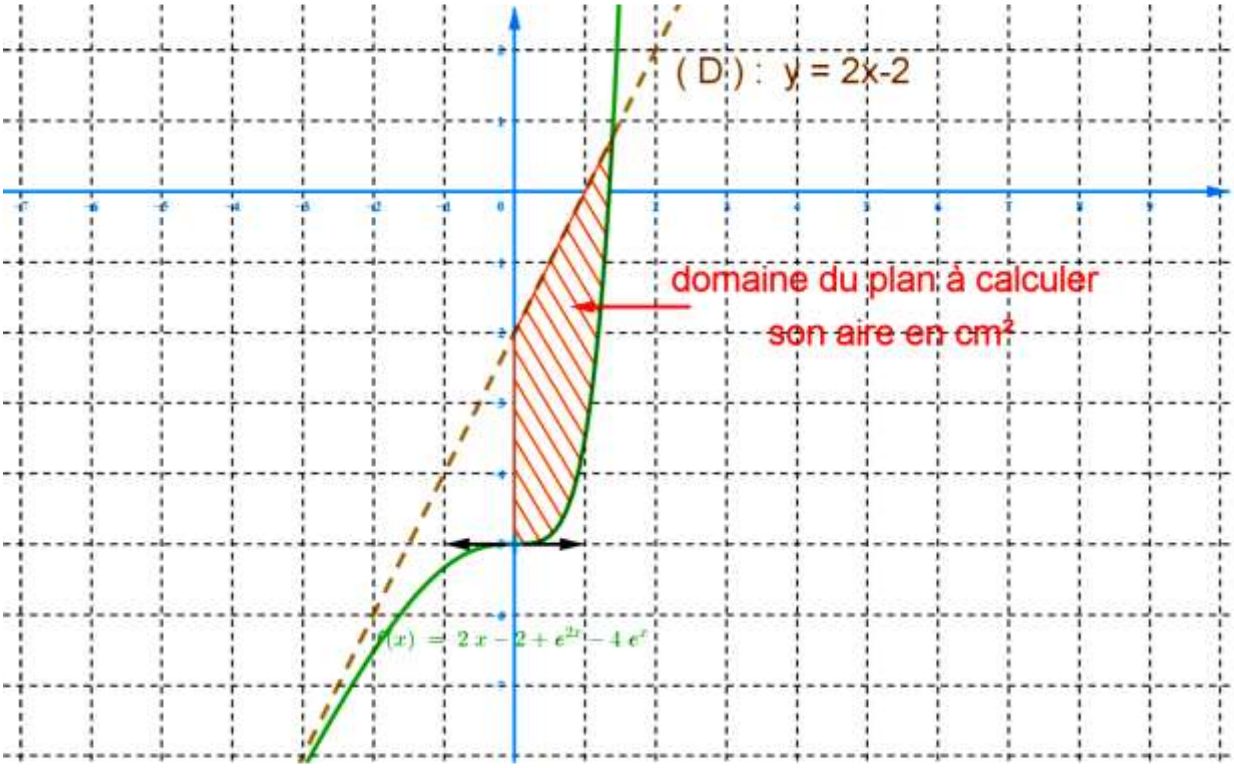
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$.

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm)

1. ..

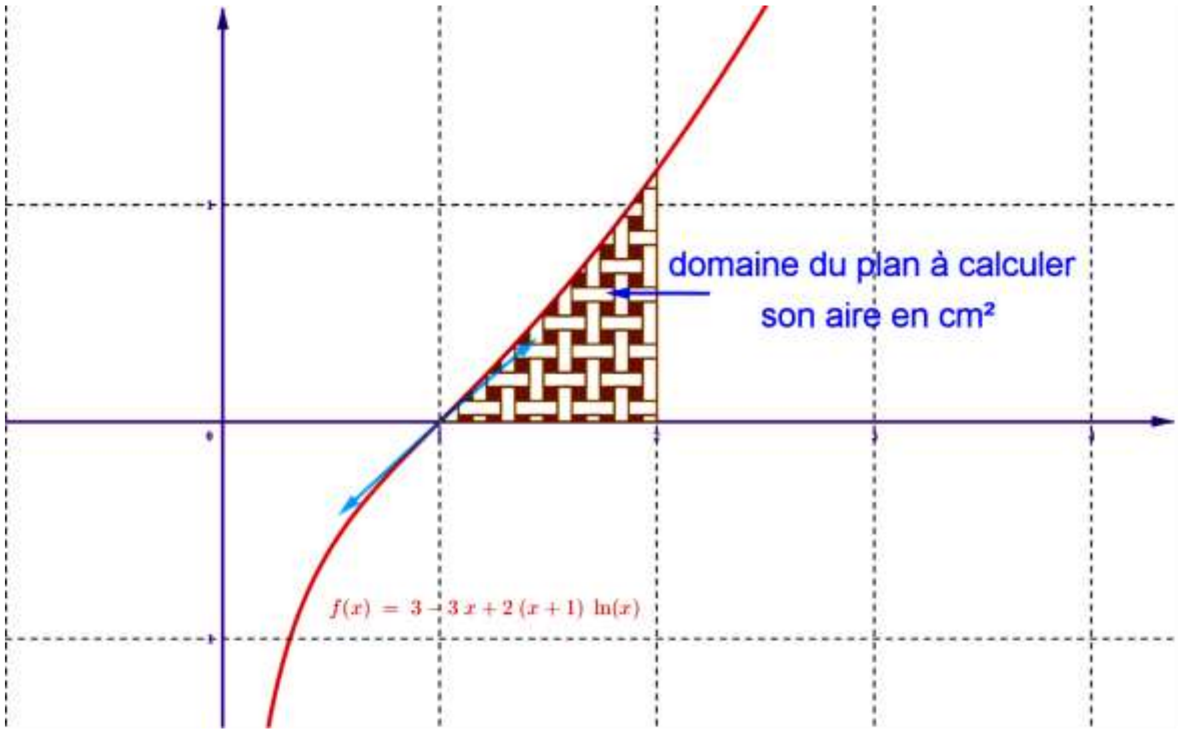
a. Montrer que : $\int_0^{\ln 4}(e^{2x} - 4e^x)dx = -\frac{9}{2}$ . ... (0,5)

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ et l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.



35. Bac 2016 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm) .(voir la figure après les questions)



1. ..

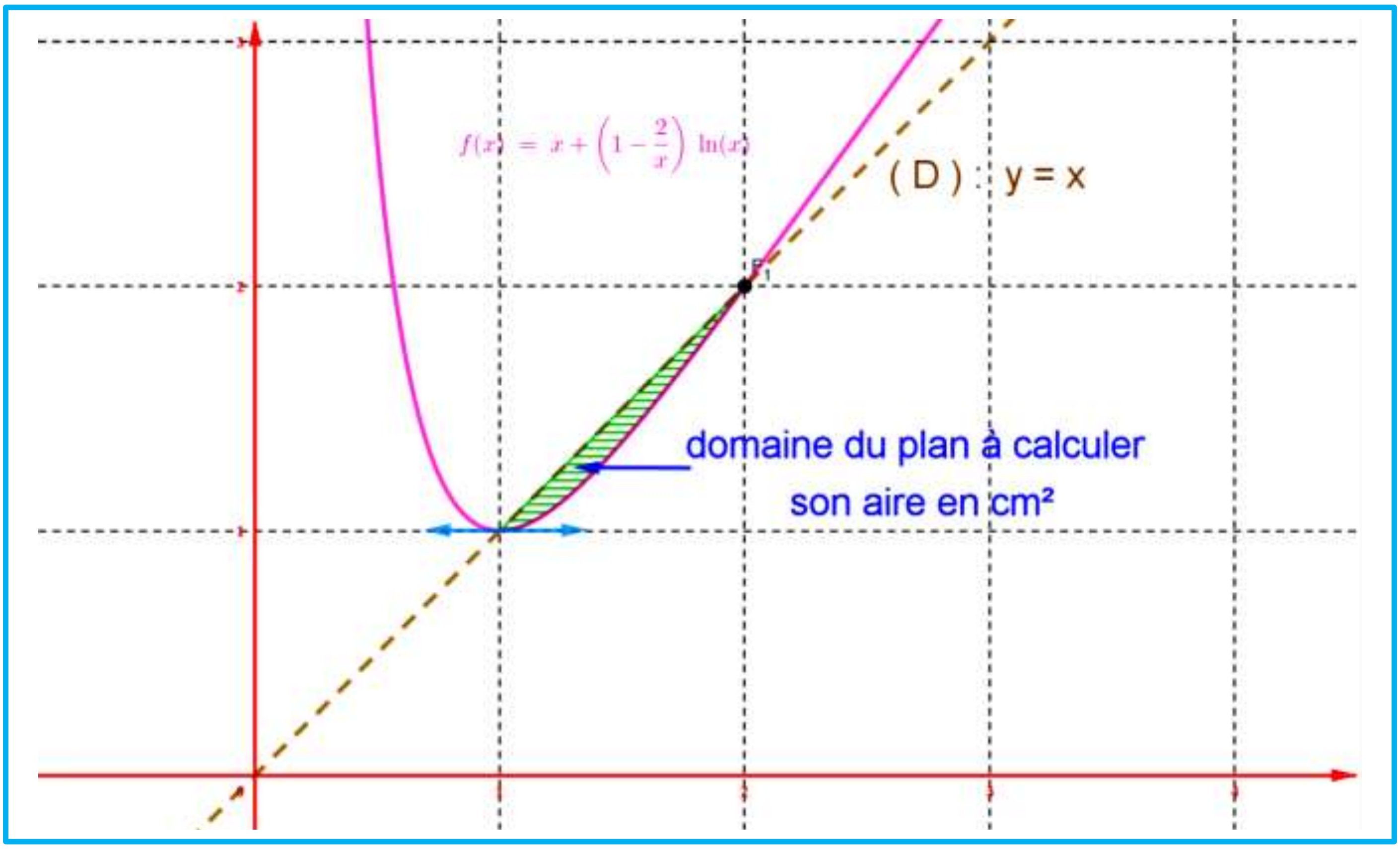
a. Montrer que : $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$ . ... (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$ . ... (0,75)

c. calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ . ... (0,5)

36. Bac 2017 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $D =]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .



1. ..

a. Montrer que : $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ . ... (0,5)

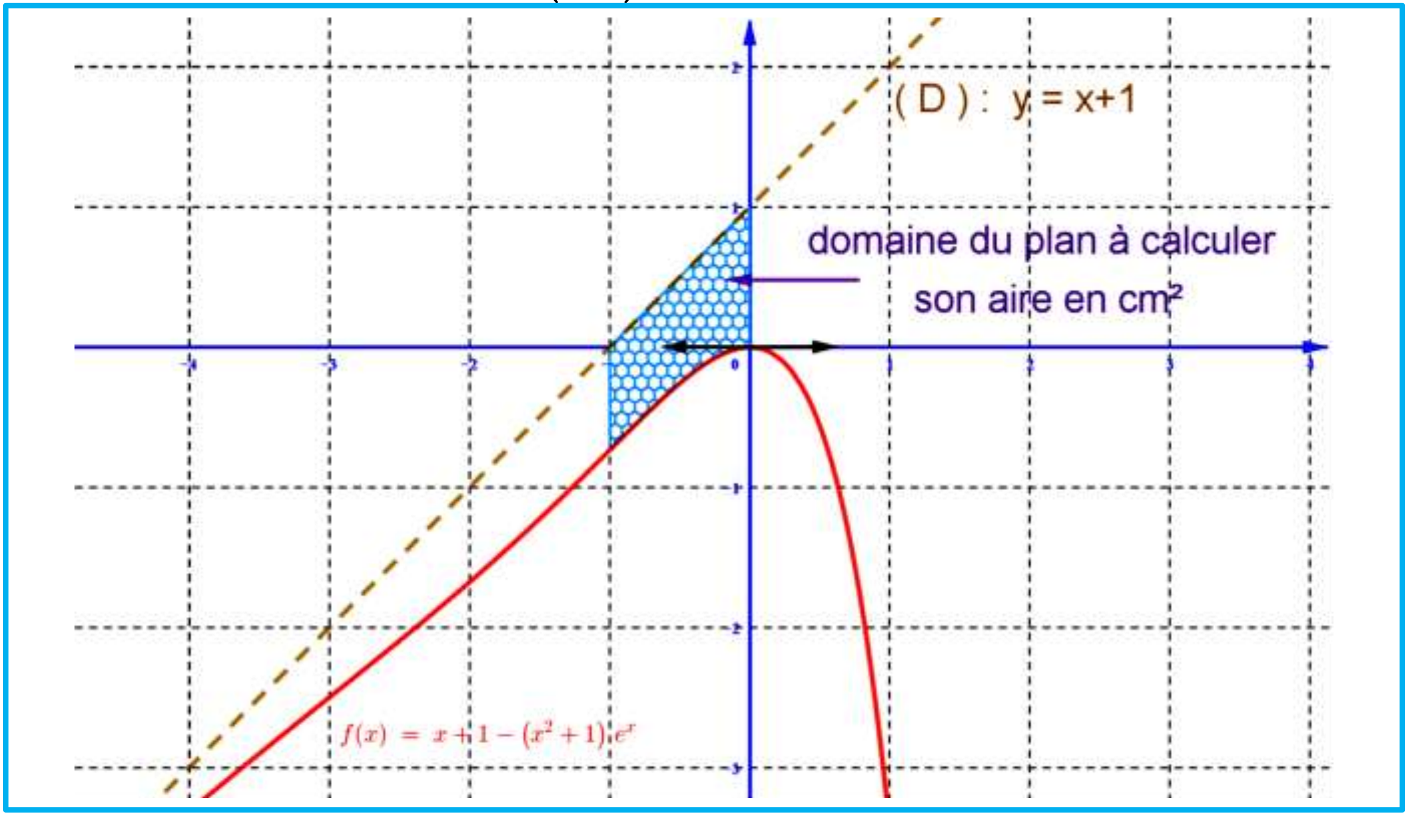
b. Montrer que : $H : x \mapsto 2\ln x - x$ est fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ . ... (0,25)

c. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right)\ln x dx = (1-\ln 2)^2$ . ... (0,5)

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ . ... (0,5)

37. Bac 2017 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 2 cm) .



1. ..

a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. puis montrer que $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$ . ... (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$. .... (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des ordonnées et la droite (D) d'équation $y = x + 1$ et la droite d'équation $x = -1$ . ... (0,5)

38. Bac 2018 session normale

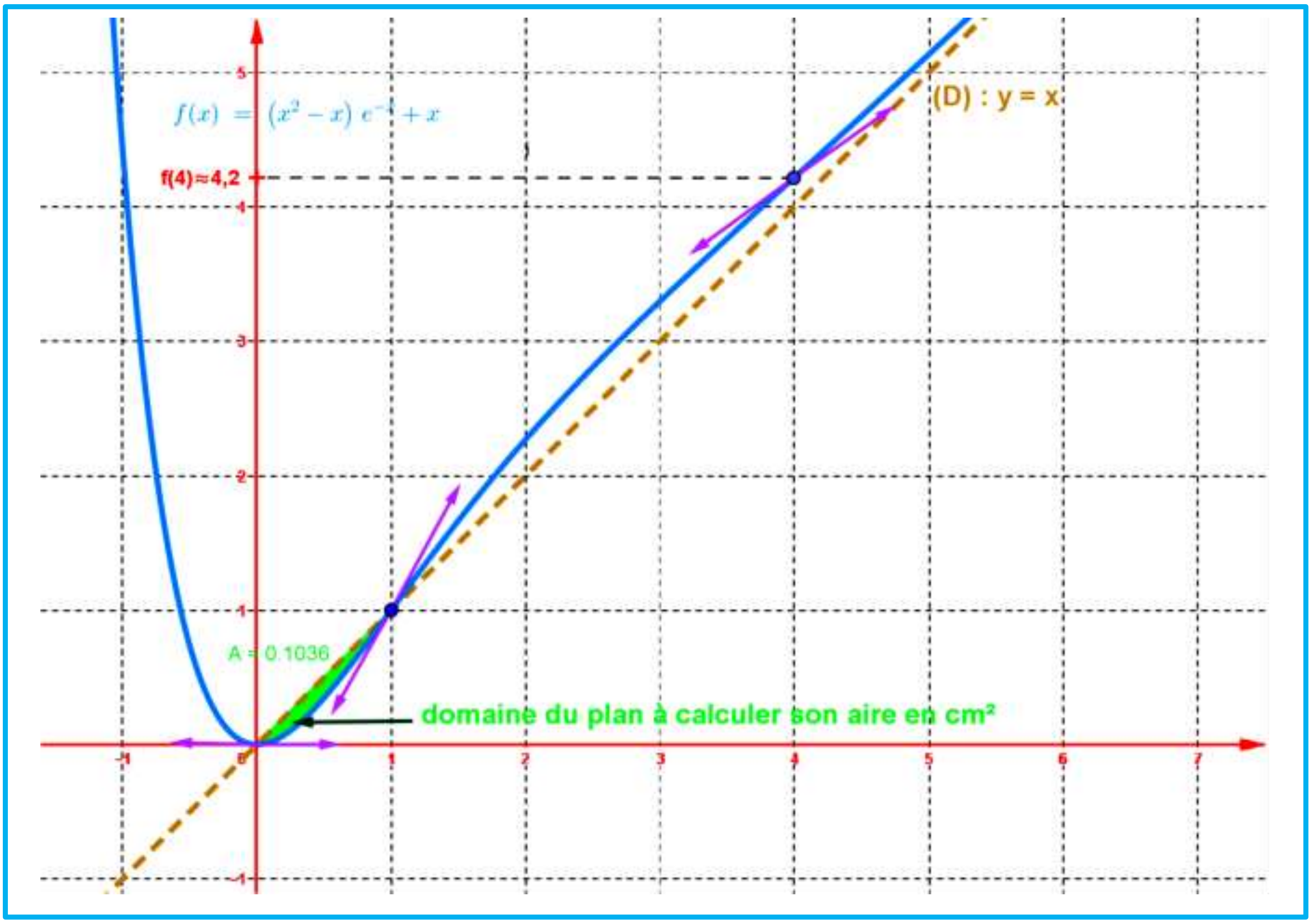
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de 1 cm) .

1.

a. Vérifier que : $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$. puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$ . ... (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$. .... (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (D) et le droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ . ... (0,75)



39. Bac 2018 session de rattrapage (pas de questions sur calcul d'aire)

1. .. .. (0,5 +0,5)
   a. Montrer que : la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
   b. En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$.
2. En utilisant une intégration par parties ; calculer $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$ .... (1)

40. Bac 2019 session normale

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .

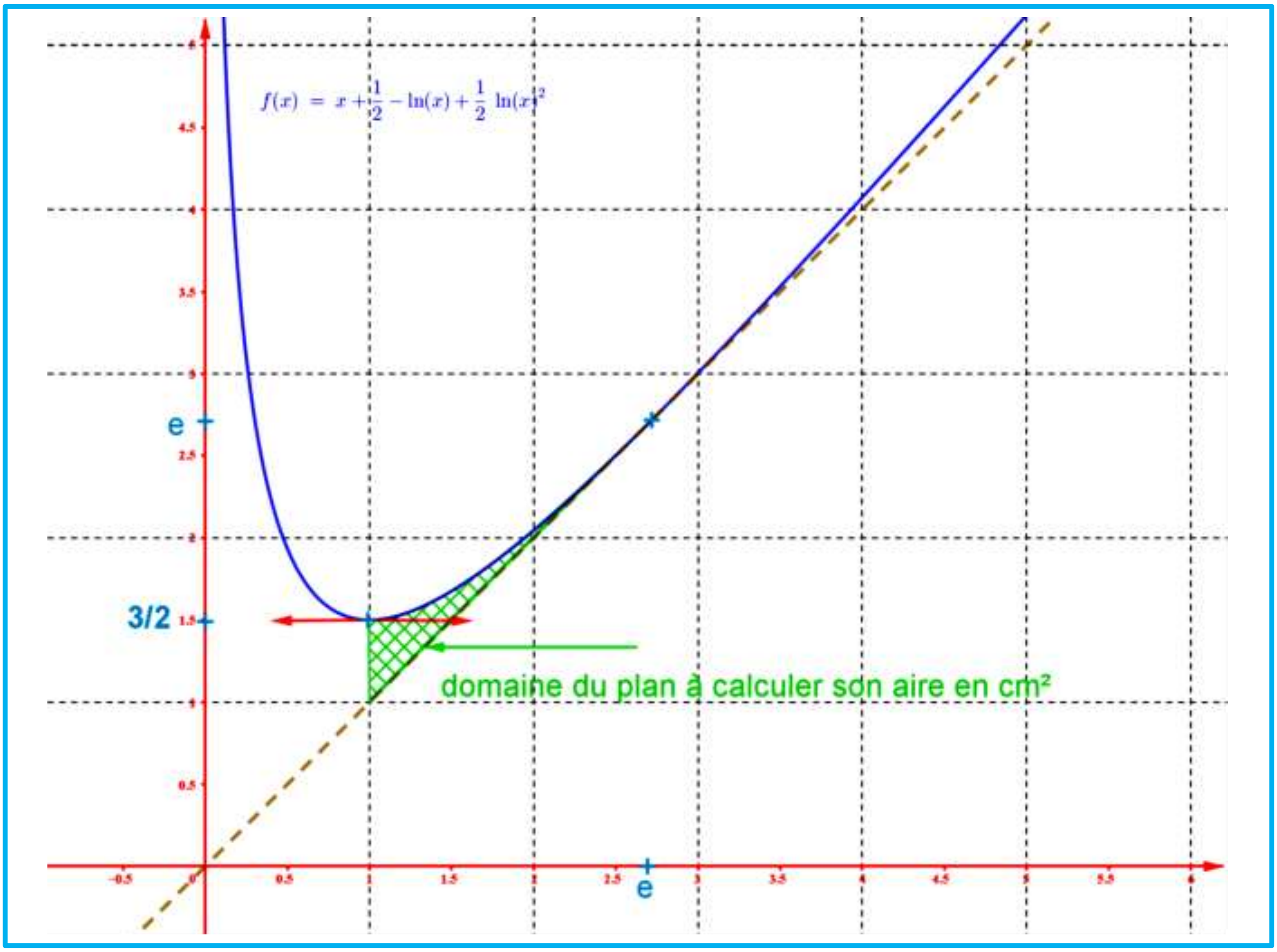
(voir la figure après les questions)

1. ..

a. Vérifier que : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ . ... (0,5)

b. A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$ . ... (0,75)

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ . ... (0,5)



41. Bac 2019 session de rattrapage

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .

(voir la figure à la fin des questions)

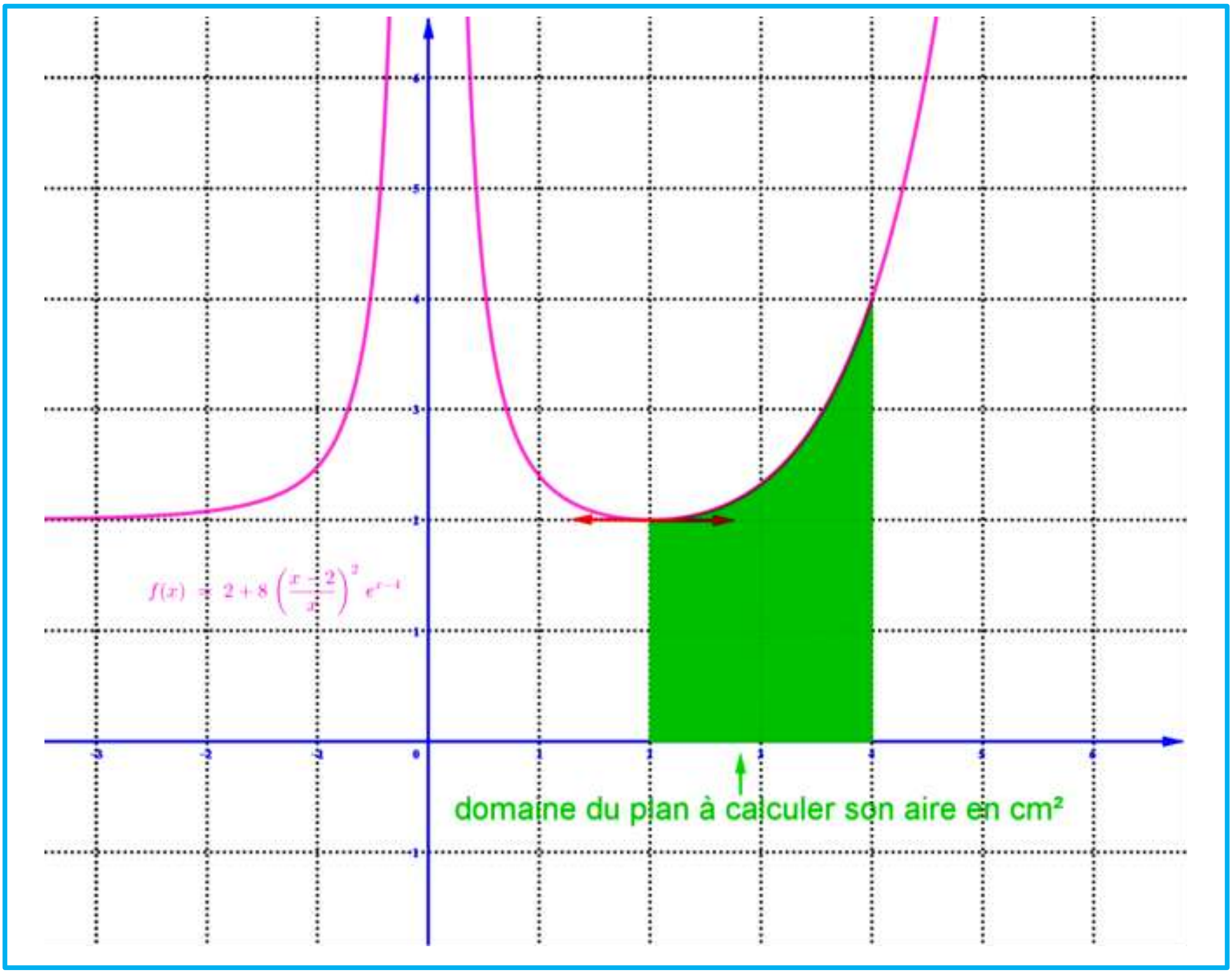
1. ..

a. Vérifier que : $H \ : \ x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h \ : \ x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2,4]$. .... (0,5)

b. Vérifier que : $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$. .... (0,25)

c. Calculer l'intégral : $\int_2^4 e^{x-4}dx$ .... (0,5)

d. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$ . ... (0,75)



42.

On considère (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. ..
   a. Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$.
   b. Calculer u_1 , puis en déduire u_0.
2. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. ..
   a. Montrer que : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b. En déduire que : $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

43.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (l'unité est 1 cm) ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$)

- On considère f la fonction numérique définie sur I $[0,h]$ par $f(x) = r$.
- Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- Soit (S) le solide obtenu par la rotation de la courbe (C_f) sur I au tour de l'axe des abscisses de 360° .

Exercice n° 1 :

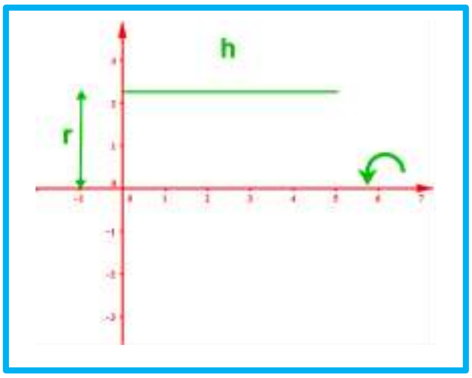
$I = [0,h]$ par $f(x) = r$ et h et r sont deux réels strictement positifs donnés .

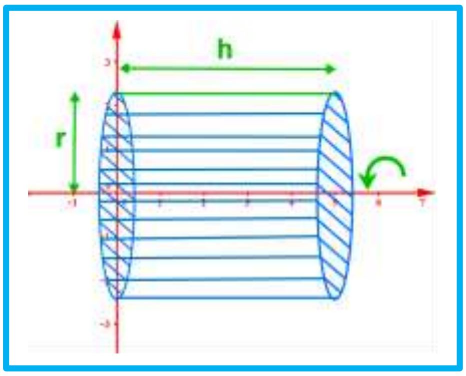
Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (voir figure)

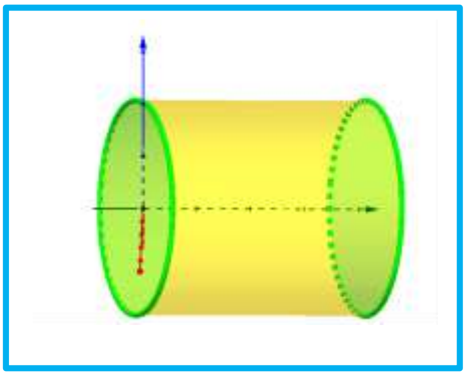
1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [-r,r]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .
2. On calcule en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0,h]$.
3. Que représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I = [0,h]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .







2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$=\int_0^h \pi r^2 dx 1\times1\times1 \ (u.v)$

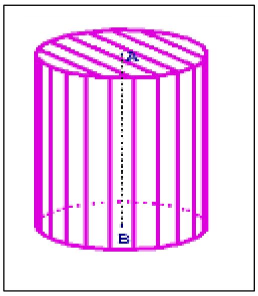
$=\pi\int_0^h r^2 dx \ (u.v)$

$=\pi\left[r^2x\right]_0^h (u.v)$ (r est un constant)

$=\pi r^2\left[(h)-0\right] \ (u.v)$

$=\pi r^2 h \ (u.v)$

Conclusion : le volume du solide de révolution est : $V=\pi\times r^2 h$ u.v .



3. le rayon et la hauteur sont exprimés
4. le résultat obtenu nous rappel de la formule du volume d'un cylindre dont la base est de rayon r et de hauteur h qu'on a étudié à l'école (حجم أسطوانة شعاع قاعدته و ارتفاعه الذي درسنها في المدرسة).
5. **Remarque :**

- Si le rayon et la hauteur sont exprimés en cm le volume est $V=\pi\times r^2 h\ cm^3$
- Le volume d'une boule ou d'une sphère de rayon r est $V=\pi r^2 h$ u.v (unité de volume)

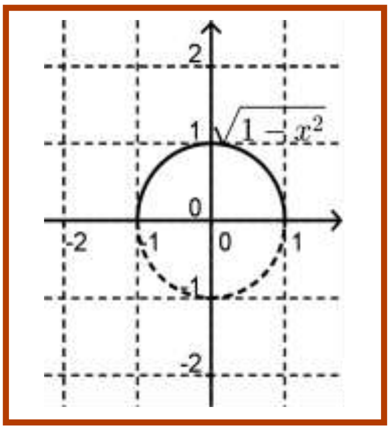
Exercice n° 2 :

On considère la fonction $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ sur $I=[-r,r]$, r est un réel strictement positif donné . (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$

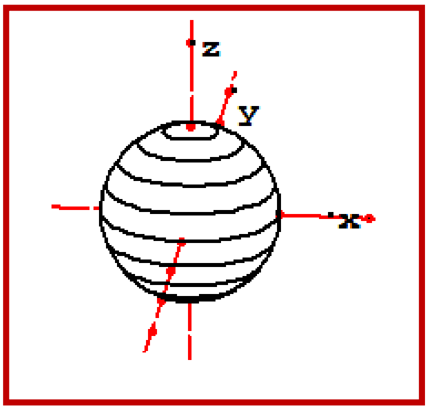
1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I=[-r,r]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .
2. Calculer en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0,h]$.
3. représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution :

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I=[-r,r]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

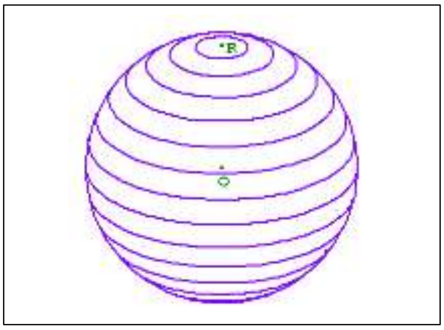


Après la rotation de la courbe (C_f)



2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$ (unité de volume)



$$V=\int_{-r}^{r}\pi\sqrt{r^2-x^2}^{\,2}dx1\times1\times1\ \ (u.v)$$

$$=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx1\times1\times1\ \ (u.v)$$

$$=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}\ \ (u.v)$$

$$=\pi\left[\left(r^2\times r-\frac{1}{3}r^3\right)-\left(r^2\times(-r)-\frac{1}{3}(-r)^3\right)\right]\ \ (u.v)$$

$$=\pi\left[\left(\frac{2}{3}r^3\right)-\left(-\frac{2}{3}r^3\right)\right]\ (u.v)$$

$$=\pi\times\frac{4}{3}r^3\ \ (u.v)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3\ \ (u.v)$$

Conclusion : le volume du solide de révolution est : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ u.v .

3. le résultat obtenu nous rappel de la formule du volume d'une boule étudier à l'école (حجم كرة الذي درسنها في المدرسة الابتدائية).

4. **Remarque :**

- Si le rayon est exprimé en cm le volume est $V=\frac{4}{3}\pi r^3\ cm^3$
- Le volume d'une boule ou d'une sphère de rayon r est $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ u.v (unité de volume)

Exercice n° 3 :

On considère la fonction $f(x)=\frac{r}{h}x$ sur $I=[0,h]$, r et h sont deux réels strictement positifs donnés .

(C_f) sa courbe représentative dans le repère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$.

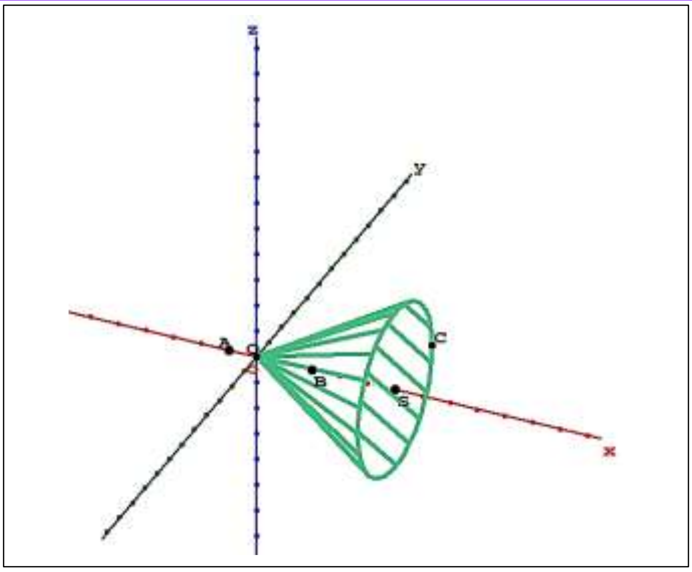
1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I=[0,h]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

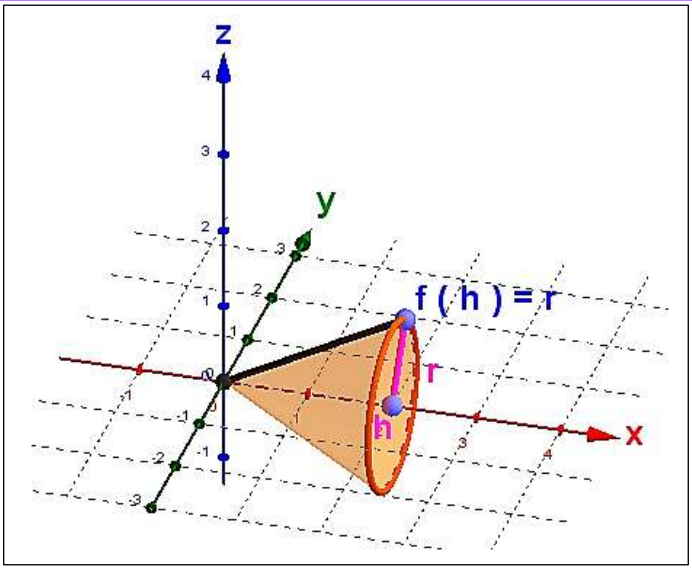
2. On calcule en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0,h]$.

3. Que représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution :

1. On construit le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $I=[0,h]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .





2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

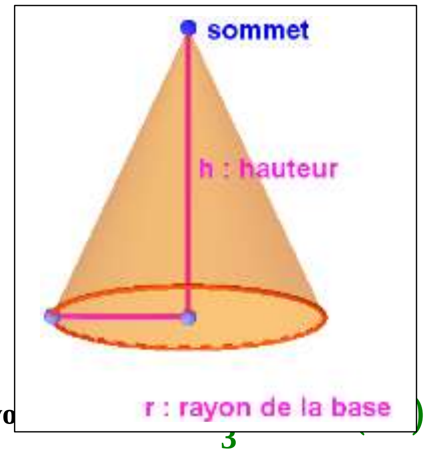
On a : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$ (unité de volume)

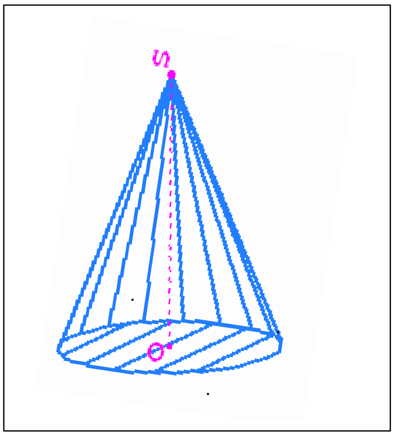
$$V=\int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx 1\times1\times1\ (u.v)$$

$$=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx\ (u.v)$$

$$=\pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx\ (u.v)$$

$$=\pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{1}{3}r^2\times h\pi\ (u.v)$$





Conclusion : le volume du solide de révo ... $\frac{}{3}$)

3. le résultat obtenu nous rappel de la formule du volume d'un cône de révolution étudier à l'école (حجم مخروط الدوراني الذي درسنها في المدرسة).

Exercice n° 3 :

On considère la fonction $f(x)=x-5$ sur $[-1,2]$, (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$

1. Construire le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[-1,2]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule en unité de volume (u.v) le volume V du solide de révolution obtenue par la rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses sur l'intervalle Que représente pour-vous le résultat obtenu ?

Solution :

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[a,b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .

2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

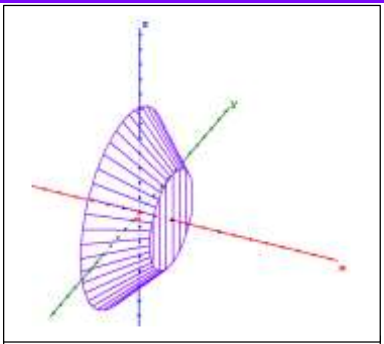
On a : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx \left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|\times\left\|\vec{k}\right\|$ (unité de volume)

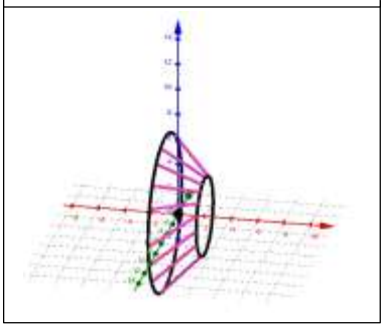
$$V=\int_{-1}^{2}\pi(x-5)^2 dx 1\times1\times1=\pi\int_{-1}^{2}(x-5)'(x-5)^2 dx \text{ cm}^3$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_{-1}^{2} \text{ cm}^3$$

$$=\frac{\pi}{3}\left((-3)^3-(-6)^3\right)=\frac{\pi}{3}\left(-3^3+6^3\right)=63\pi \text{ cm}^3$$

Conclusion : le volume du solide de révolution est $V=63\pi \text{ cm}^3$.





Exercice n° 4 :

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f=\left]0,+\infty\right[$ par :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}(1+\ln x),$$

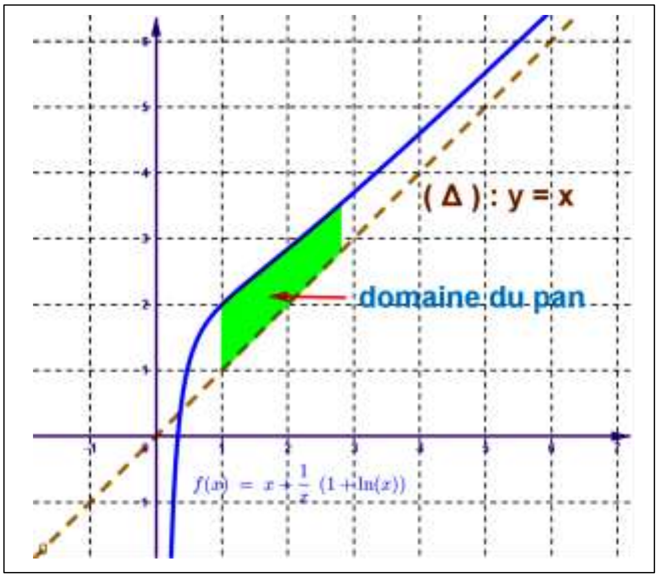
Soit le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) . (voir la figure après les questions)

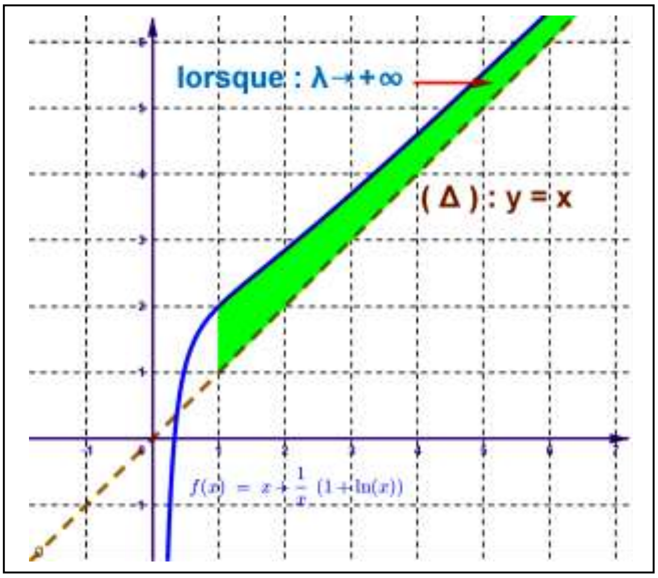
Soit $\lambda\in\left]1,+\infty\right[$ et (A) le domaine des points $M(x,y)$ du plan (P) tel que $\begin{cases}1\le x\le\lambda\\ x\le y\le f(x)\end{cases}$ c'est-à-dire domaine plan limité par la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\lambda$

1. Colorer le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.
2. Soit $A(\lambda)$ la surface du domaine (A) ,calculer en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)
3. Calculer : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

Solution :

1. On colore le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.





2. On calcule en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)

$$A(\lambda)=\left(\int_1^\lambda |f(x)-x|\,dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$ (unité de surface est le cm^2)

$$=\left(\int_1^\lambda (f(x)-x)\,dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\ cm^2$$ (car la courbe est au dessus de la droite (D))

$$=\left(\int_1^e\left(\cancel{x}+\frac{1}{x}(1+\ln x)-\cancel{x}\right)dx\right)\times 1\times 1\ \ cm^2$$ (car unité de 1 cm)

$$=\int_1^\lambda\left((1+\ln x)'(1+\ln x)\right)dx\ cm^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_1^\lambda\ cm^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\ln\lambda)^2-(1+\ln 1)^2\right]\ cm^2$$

$$=\frac{1}{2}\left((1+\ln\lambda)^2-1\right)\ cm^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\lambda^2+\ln\lambda\ cm^2$$

Conclusion : l'aire du domaine plan (A) en cm^2 et en fonction de λ est :

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}\ln\lambda^2+\ln\lambda\ cm^2$$

3. On calcule : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

On a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\lambda^2+\ln\lambda$$

$$=+\infty\quad\left(\text{car } \lim_{\lambda\to+\infty}\ln\lambda=+\infty\right)$$

Conclusion : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=+\infty$

Exercice n° 5 :

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f=]0,+\infty[$ par : $f(x)=5\dfrac{\ln x}{x}$,

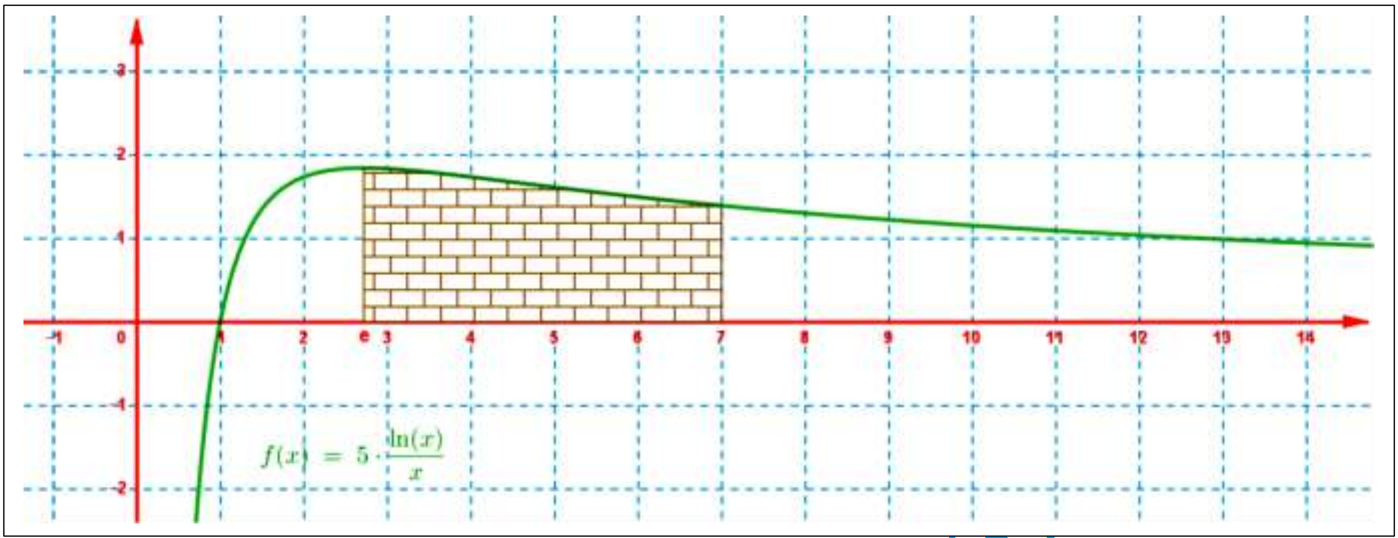
Soit le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm) . (voir la figure après les questions)

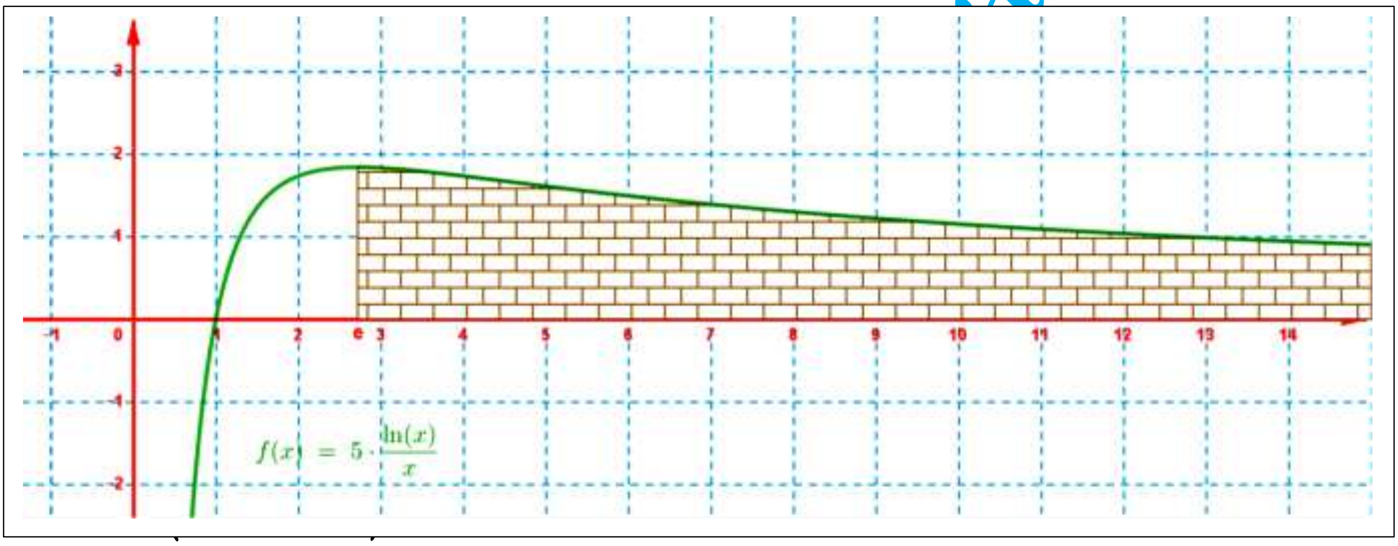
Soit $\lambda\in]e,+\infty[$ et (A) le domaine des points $M(x,y)$ du plan (P) tel que : $\begin{cases} e\le x\le\lambda \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ c'est à dire domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e$ et $x=\lambda$

1. Colorer le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.
2. Soit $A(\lambda)$ la surface du domaine (A) ,calculer en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)
3. Calculer : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

Solution :

1. On colore le domaine (A) puis lorsque λ tend vers $+\infty$.





$$=\left(\int_1^{\lambda}\left(f(x)-x\right)dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \text{ cm}^2 \text{ (car la courbe est au dessus de la droite } (D) \text{)}$$

$$=\left(\int_1^{e}\left(\cancel{x}+\frac{1}{x}(1+\ln x)-\cancel{x}\right)dx\right)\times 1\times 1 \text{ cm}^2 \text{ (car unité de 1 cm)}$$

$$=\int_1^{\lambda}\left((1+\ln x)'(1+\ln x)\right)dx \text{ cm}^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_1^{\lambda} \text{ cm}^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\ln\lambda)^2-(1+\ln 1)^2\right] \text{ cm}^2$$

$$=\frac{1}{2}\left((1+\ln\lambda)^2-1\right) \text{ cm}^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\lambda^2+\ln\lambda \text{ cm}^2$$

Conclusion : l'aire du domaine plan (A) en cm^2 et en fonction de λ est : $A(\lambda)=\frac{1}{2}\ln\lambda^2+\ln\lambda\ cm^2$

3. On calcule : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

On a : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\lambda^2+\ln\lambda=+\infty$ $\left(\text{car } \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\ln\lambda=+\infty\right)$

Conclusion : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=+\infty$

Exercice n° 6 :

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f=]0,+\infty[$ par : $f(x)=2x+1+\ln x$,

Soit le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 5 cm) . (voir la figure après les questions)

Soit $\lambda\in\left]0,\frac{1}{5}\right[$ et (A) le domaine des points $M(x,y)$ du plan (P) tel que : $\begin{cases}\lambda\le x\le\frac{1}{5}\\ f(x)\le y\le 0\end{cases}$ c'est à dire domaine plan limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\frac{1}{5}$

1. Colorer le domaine (A) puis lorsque λ tend vers 0 par valeur supérieure .

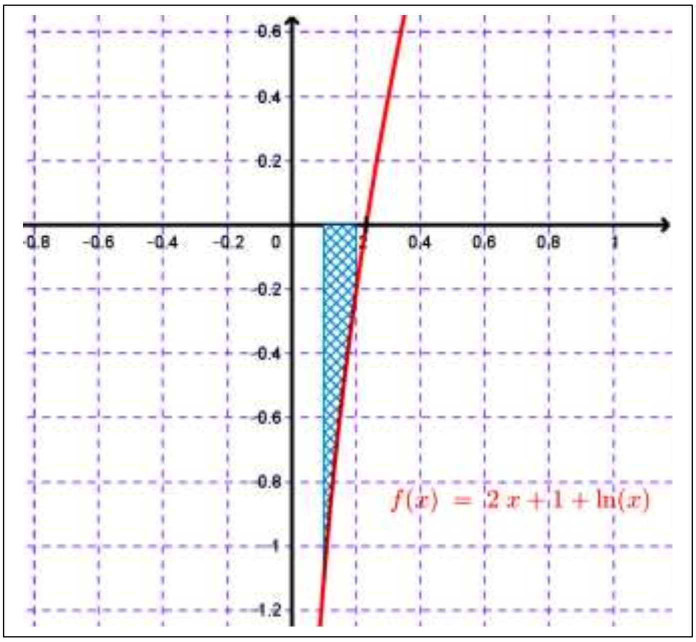
2. Montrer que : $H: x\mapsto x^2+x\ln x$ est une primitive de la fonction $h\mapsto 2x+1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$

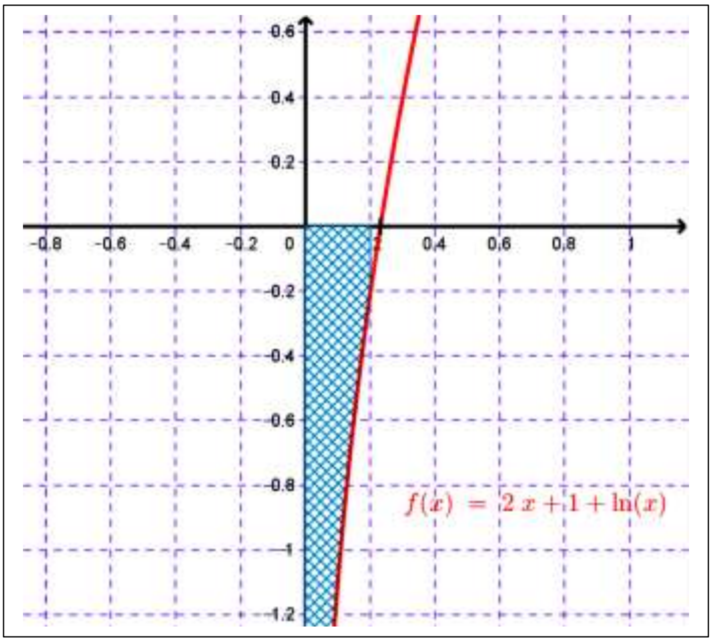
3. Soit $A(\lambda)$ la surface du domaine (A) ,calculer en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)

4. Calculer : $\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\ \lambda>0}} A(\lambda)$

Solution :

1. On colore le domaine (A) puis lorsque λ tend vers 0 par valeur supérieure .





2. Montrons que : $H : x \mapsto x^2 + x\ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 2x+1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(x^2 + x\ln x\right)' \\ &= \left(x^2\right) + \left(x\ln x\right)' \\ &= 2x + (x)'\ln x + x\times(\ln x)' \\ &= 2x + 1\times\ln x + \cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}} \\ &= 2x+1+\ln x \end{aligned}$$

Conclusion : $H : x \mapsto x^2 + x\ln x$ est une primitive de la fonction $h \mapsto 2x+1+\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

3. On calcule en cm^2 et en fonction de λ l'aire du domaine plan (A)

$$A(\lambda) = \left(\int_1^{\lambda}|f(x)|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \quad \text{(unité de surface est le } cm^2\text{)}$$

$$= \left(-\int_1^{\lambda} f(x)dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\| \; cm^2 \quad \text{(car la courbe est au dessous de l'axe des abscisses)}$$

$$= \left(\int_1^{e}(2x+1+\ln x)dx\right)\times 5\times 5 \; cm^2 \quad \text{(car unité de } 5\text{ cm)}$$

$$= 25\int_{\lambda}^{\frac{1}{5}}(2x+1+\ln x)dx \; cm^2$$

$$= 25\left[x^2 + x\ln x\right]_{\lambda}^{\frac{1}{5}} \; cm^2$$

$$= 25\left[\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{5}\right)\right)^2 - \lambda^2 + \lambda\ln\lambda\right] cm^2$$

$$= 1 - 5\ln 5 - 25\lambda^2 - 25\lambda\ln\lambda \; cm^2$$

Conclusion : l'aire du domaine plan (A) en cm^2 et en fonction de λ est :

$$A(\lambda) = 1 - 5\ln 5 - 25\lambda^2 - 25\lambda\ln\lambda \; cm^2$$

4. On calcule : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

On a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(1-5\ln 5 - 25\lambda^2 - 25\lambda\ln\lambda\right)$$

$$= 1 - 5\ln 5 \quad \left(\text{car } \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}}\lambda\ln\lambda = 0\right)$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} A(\lambda) = 1 - 5\ln 5$

Remarque :

- la surface est un nombre fini même le domaine du plan n'est pas limité .
- la surface du domaine (A) lorsque λ tend vers 0 par valeur supérieure est : $1-5\ln 5 \; cm^2$ malgré l'unité de mesure est 5 cm .