

L'intégrale

Prof. Smail BOUGUERCH

Intégral d'une fonction continue sur un segment:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$

L'intégral de la fonction f entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

propriétés:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

La linéarité:

$$(k \in \mathbb{R}) ; \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Intégral et comparaison:

Si : $\forall x \in [a; b]$ on a $f(x) \geq 0$

Alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Si : $\forall x \in [a; b]$ on a $f(x) \geq g(x)$

Alors : $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

La valeur moyenne:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur le intervalle $[a; b]$ est le réel défini par : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Intégration par partie:

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$ à condition que f' et g' soient continues sur l'intervalle $[a; b]$

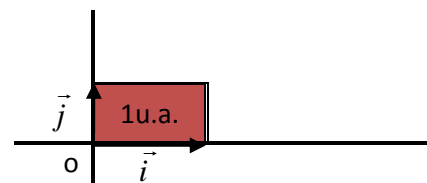
$$\int_a^b [f'(x) \times g(x)] dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x) \times g'(x)] dx$$

Calcul de l'aire algébrique d'un domaine plan:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

L'unité de surface (u.a.): est la surface d'un rectangle défini par le point O (origine du repère) et les deux vecteurs \vec{i} et \vec{j}

$$1u.a. = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

L'aire algébrique délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est représentée par :

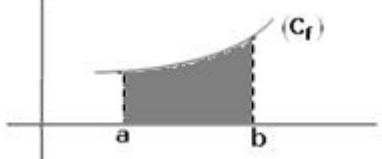
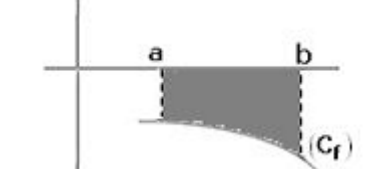
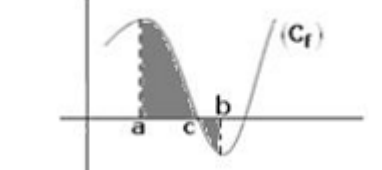
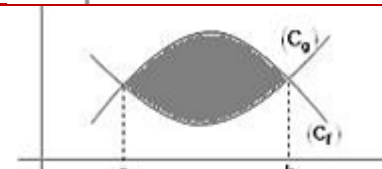
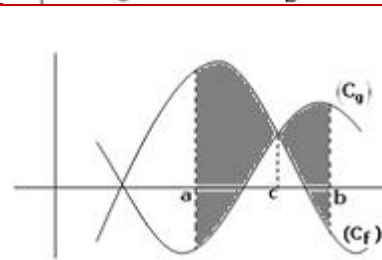
$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) u.a.$$

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$

L'aire algébrique comprise entre la courbe (C_f) , la courbe (C_g) , et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est représentée par :

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a.$$

Cas particulier:

La représentation	Remarques	Aire algébrique du domaine plan gris dans la représentation
	f positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x) dx \right) u.a.$
	f négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (-f(x)) dx \right) u.a.$
	<ul style="list-style-type: none"> f positive sur $[a;c]$ f négative sur $[c;b]$ 	$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b (-f(x)) dx \right) u.a.$
	(C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x) - g(x) dx \right) u.a.$
	<ul style="list-style-type: none"> (C_f) se situe au-dessus de (C_g) sur $[a;c]$ (C_g) se situe au-dessus de (C_f) sur $[c;b]$ 	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) u.a.$

Calcul d'un volume:

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f) , autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est :

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.a.$$

