Calcul intégral

EL KYAL MOHAMED

Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

L'intégrale de f de a à b est le nombre réel : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Propriétés :

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Linéarité: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $(k \in \mathbb{R})$ $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	
Relation de Chasles: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	

Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur segment $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Intégrale et ordre :

$$si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq 0 \ , \ alors \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x) \ , \ alors \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx$$

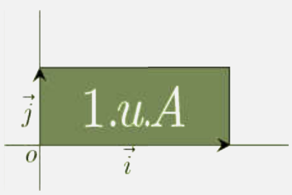
Calcul d'aires :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(o,\vec{i},\vec{j})$

Soit I et J deux points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

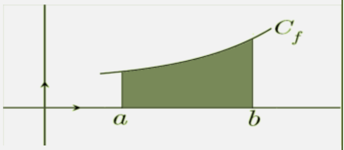
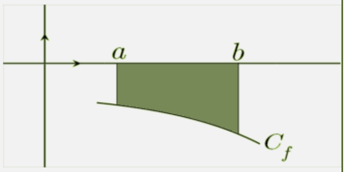
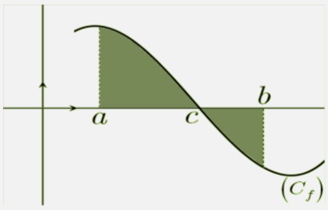
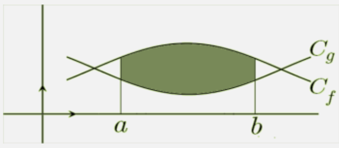
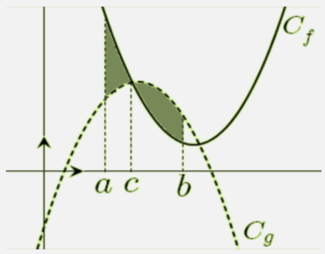
L'unité d'aire, notée $u.A$, est l'aire du rectangle bâti à partir des points O , I et J

$$1.u.A = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$



L'aire du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est: $\left(\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx\right).u.A$	**L'aire** du domaine délimité par C_f , C_g et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est: $\left(\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx\right).u.A$

- ***Cas particuliers :***

Figure illustrative	Remarque	L'aire du domaine hachuré sur la figure
	f est positive sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right).u.A$
	f est négative sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b -f(x)\,dx\right).u.A$
	• f est positive sur $[a;c]$ • f est négative sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx\right).u.A$
	C_f est au dessus de C_g sur $[a;b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right).u.A$
	• C_f est au dessus de C_g sur $[a;c]$ • C_f est au dessous de C_g sur $[c;b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))\,dx+\int_c^b (g(x)-f(x))\,dx\right).u.A$

- ***Calcul de volumes :***

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C_f sur $[a;b]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est:

$$V=\left[\int_a^b \pi\,(f(x))^2\,dx\right]u.v$$

$u.v$: unité de volume