

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 2)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

TD :NOMBRES COMPLEXES(Partie 2)

Exercice1 : Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$1) z_1 = 2 + 2i \quad 2) z_2 = 1 - i\sqrt{3} \quad 3) z_1 \times z_2$$

$$4) \frac{z_1}{z_2} \quad 5) (z_2)^{12}$$

Exercice2 : en utilisant la Formule de Moivre

$$1) \text{montrer que : } \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{Et que : } \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{montrer que : } \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\text{Et que : } \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

$$3) \text{montrer que : } \cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1$$

$$\text{Et que : } \sin 4\theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4 \theta$

Exercice4 :1) Montrer que $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

$$2) \text{on pose : } u = 3e^{i\frac{\pi}{5}} \text{ et } v = 3e^{i\frac{\pi}{7}} \text{ et } u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Et } u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u + v$; u_1 et u_2

Exercice5 :1) en utilisant la formule d'Euler

$$\text{Montrer que : } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{Montrer que : } \cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$$

$$3) \text{Montrer que : } \sin^3 \theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$4) \text{Montrer que : } \sin^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

$$5) \text{Linéariser : a) } \sin^5 \theta \quad \text{b) } \cos^2 \theta \sin^3 \theta$$

Exercice6 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : 1) $(E): z^2 - z + 2 = 0$

$$2) (E): z^2 - z - 2 = 0$$

$$3) (E): z^2 - 2z + 1 = 0$$

Exercice7 : soit $z \in \mathbb{C}$ on pose : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

$$1) \text{calculer : } P(1-i)$$

2) en déduire dans \mathbb{C} la résolution de l'équations $P(z) = 0$

Exercice8 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : 1) $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

$$2) z^2 - 6z + 13 = 0$$

$$3) (4 \cos \theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i \sin \theta = 0 \text{ avec : } \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Exercice9 :1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

$$2) \text{Soit } P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels $a; b; c$ tels que :

$$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 0$

Exercice 10 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2z^2 - 2z + 5 = 0$ 2) $3z^3 - 3z^2 + 2z - 2 = 0$

Exercice 11 : soit : $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2) en déduire : $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Exercice 12 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ; B ; C d'affixe respectivement $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}) = 4-2i$

1) montrer que : $z' = z + 4 - 2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{u})

2) vérifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer z_B l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Exercice 13 : Dans le plan complexe $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on

considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit

z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3; -2)$ et de Rapport $k = 4$

1) montrer que : $z' = 4z - 9 + 6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega, k)$)

2) déterminer z_A' l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega, k)$

Exercice 14 : Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A ; B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r)

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10+11i$

Exercice 15 : Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Exercice 16 : Soit la rotation r de centre $\Omega(i)$ et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Exercice 17 : Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Exercice 18 : Dans le plan complexe direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point : A (i) et la rotation

R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 la

rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Exercice 19: soit ABC un triangle isocèle et

rectangle on A tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

et soit R la rotation de centre A et qui transforme

B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$

Exercice 20: soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1| \leq |z| - 1 + |z| |\arg z|$

Exercice 21 : soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$$|a|=|b|=|c|=1 \text{ et } a \neq c \text{ et } b \neq c$$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$

Exercice 22 : soit le nombre complexe $z = e^{i \frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\operatorname{Im}(S) > 0$

3) calculer $S+T$ et $S \times T$

4) en déduire les nombres S et T

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

