

## Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 2)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

# TD : NOMBRES COMPLEXES (Partie 2)

**Exercice1 :** Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1)  $z_1 = 2 + 2i$       2)  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$       3)  $z_1 \times z_2$

4)  $\frac{z_1}{z_2}$       5)  $(z_2)^{12}$

**Exercice2 :** en utilisant la Formule de Moivre

1) montrer que :  $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$

Et que :  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

2) montrer que :  $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

Et que :  $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

3) montrer que :  $\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$

Et que :  $\sin 4\theta = 4\cos^3 \theta \sin \theta - 4\cos \theta \sin^3 \theta$

**Exercice3 :** Linéariser :  $\cos^4 \theta$

**Exercice4 :** 1) Montrer que  $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left( e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2) on pose :  $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$  et  $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$  et  $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et  $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes :  $u + v$  ;  $u_1$  et  $u_2$

**Exercice5 :** 1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que :  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$

2) Montrer que :  $\cos^3 \theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos \theta$

3) Montrer que :  $\sin^3 \theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin \theta \quad \theta \in \mathbb{R}$

4) Montrer que :  $\sin^4 \theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a)  $\sin^5 \theta$       b)  $\cos^2 \theta \sin^3 \theta$

**Exercice6 :** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

suivantes : 1)  $(E) : z^2 - z + 2 = 0$

2)  $(E) : z^2 - z - 2 = 0$

3)  $(E) : z^2 - 2z + 1 = 0$

**Exercice7 :** soit  $z \in \mathbb{C}$  on pose :  $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1) calculer :  $P(1-i)$

2) en déduire dans  $\mathbb{C}$  la résolution de l'équations  $P(z) = 0$

**Exercice8 :** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

suivantes : 1)  $(z^2 + 9)(z^2 - 4) = 0$

2)  $z^2 - 6z + 13 = 0$

3)  $(4\cos \theta)z^2 - 2(\cos 2\theta)z + i\sin \theta = 0$  avec :  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

**Exercice9 :** 1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$z^2 - 8z + 17 = 0$

2) Soit  $P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$

a) Montrer que l'équation  $P(z) = 0$  admet un imaginaire pur unique comme solution.

b) déterminer les réels  $a; b; c$  tels que :

$$P(z) = (z + i)(az^2 + bz + c)$$

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(z) = 0$

**Exercice10 :** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1) 2Z^2 - 2Z + 5 = 0 \quad 2) 3Z^3 - 3Z^2 + 2Z - 2 = 0$$

**Exercice11:** soit :  $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes  $z$

2) en déduire :  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$

**Exercice12 :** Dans le plan complexe  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points : A ; B ; C d'affixe respectivement  $z_A = 3+5i$  ;  $z_B = 3-5i$  ;  $z_C = 7+3i$

Et soit  $z'$  l'affixe de M' l'image de M ( $z$ ) par la translation  $t_{\vec{u}}$  tel que  $aff(\vec{u}) = 4-2i$

1) montrer que :  $z' = z + 4 - 2i$  ( l'écriture complexe de la translation de vecteur  $\vec{u}$  )

2) vérifier que le Point C est l'image de A par  $t_{\vec{u}}$

3) déterminer  $z_{B'}$  l'affixe de B' l'image de B par la translation  $t_{\vec{u}}$

**Exercice13 :** Dans le plan complexe  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le points : A d'affixe  $z_A = 3+5i$  et soit  $z'$  l'affixe de M' l'image de M ( $z$ ) par l'homothétie de centre  $\Omega(3; -2)$  et de Rapport  $k = 4$

1) montrer que :  $z' = 4z - 9 + 6i$  ( l'écriture complexe de l'homothétie  $h(\Omega, k)$  )

2) déterminer  $z_{A'}$  l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie  $h(\Omega, k)$

**Exercice14 :** Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points : A ; B d'affixe respectivement  $z_A = 7+2i$  ;  $z_B = 4+8i$

Et soit  $z'$  l'affixe de M' l'image de M ( $z$ ) par la rotation  $r$  de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

1) montrer que :  $z' = iz + 4i + 12$  ( l'écriture complexe de la rotation  $r$  )

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation  $r$  est  $z_C = 10+11i$

**Exercice15 :** Déterminer l'écriture complexe de la rotation  $r$  de centre  $\Omega(1+i)$  et d'angle  $\frac{3\pi}{4}$

**Exercice16 :** Soit la rotation  $r$  de centre  $\Omega(i)$  et transforme O en  $O' \left( \frac{\sqrt{3}+i}{2} \right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

**Exercice 17:** Soit  $f$  une transformation plane qui transforme M( $z$ ) en M' ( $z'$ ) tel que

$$z' = -2z + 3 - 3i$$

Déterminer la nature de la transformation  $f$  et ses éléments caractéristiques

**Exercice 18:** Dans le plan complexe direct

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le point : A ( $i$ ) et la rotation

$R_0$  de centre O (0) et d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et soit  $R_1$  la

rotation de centre A ( $i$ ) et d'angle  $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation  $R_1 \circ R_0$  et ses éléments caractéristiques

**Exercice 19:** soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$   
et soit  $R$  la rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation  $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer :  $F_1 = R \circ T$  et  $F_2 = T \circ R$

**Exercice 20:** soit  $z$  un nombre complexe non nul

Montrer que :  $|z-1| \leq ||z|-1| + |z| |\arg z|$

**Exercice 21 :** soit a et b et c des nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1 \text{ et } a \neq c \text{ et } b \neq c$$

1) Montrer que :  $\left( \frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que :  $\arg \left( \frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left( \frac{b}{a} \right) \left[ \frac{\pi}{2} \right]$

**Exercice 22 :** soit le nombre complexe  $z = e^{i \frac{2\pi}{7}}$

On pose :  $S = z + z^2 + z^4$  et  $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) Montrer que les nombres  $S$  et  $T$  sont conjugués

2) Montrer que :  $\text{Im}(S) > 0$

3) calculer  $S+T$  et  $S \times T$

4) en déduire les nombres  $S$  et  $T$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

