EXERCICES ET PROBLÈMES

EXERCICE1:

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$z_1 = i^{2020}$; $z_2 = \left(3-\sqrt{2}i\right)^2$; $z_3 = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}i}$

$z_4 = \dfrac{(1-2i)^2-(1-i)^3}{(1+3i)^3+(1+i)^2}$; $z_5 = \dfrac{1}{7-4i}$

$z_6 = \dfrac{1+i}{1-i}$; $z_7 = \dfrac{1}{1-i}+\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{i}{2}$.

EXERCICE2:

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z + 1 = 0$.
2) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points d'affixes respectives A , B et C , tel que :

$$z_A = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \;;\; z_B = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \;\text{ et }\; z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

3) On désigne par A' l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- Placer le point A' et démontrer que le triangle $AA'C$ est isocèle en A .

4) On désigne par B' l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. .
- Placer le point B' , et exprimer l'affixe $z_{B'}$ en fonction z_B .
- En déduire la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z_{B'}$

5) Calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

EXERCICE3: (Session normale 2016)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4bz + 29 = 0$
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et Ω d'affixes respectives a , b et ω telles que : $a=5+2i$; $b=5+8i$ et $\omega = 2+5i$

a) Considérons $u = b - \omega$. Vérifier que $u = 3+3i$, pois montrer que $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$.

c) Vérifier que: $a - \omega = \bar{u}$, en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer l'image du point A par la rotation R.

EXERCICE4: (Session normale 2019)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives : $a = 1 - i\sqrt{3}$; $b = 2+2i$; $c = \sqrt{3}+i$ et $d = -2+2\sqrt{3}$

a) Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c-d)$.

b) En déduire que A , B , C et D sont alignées.

3) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}az$
4) Soit $H(h)$ l'image du point B par la rotation R, et le point $P(p)$, tel que $p = a - c$

a) Vérifier que : $h = ip$.

b) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

EXERCICE5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ direct. On considère les points A,B, C et D d'affixes respectives $a = 1$; $b = 3 + 4i$;

$c = 2\sqrt{3}+i(-2-\sqrt{3})$ et $d = -2\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})$.

L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1) a. Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.

b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle (C) de centre A dont on déterminera le rayon.

2) Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.

b. Montrer que le point F est le milieu de [CD].

c. Montrer que $\dfrac{c-z_F}{a-z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{c-z_F}{a-z_F}$. Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].

EXERCICE6:

Le plan est rapporter au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

1) $|z-1+2i| = 4$ 2) $|z-2+i| = |\bar{z}+2-2i|$

3) $|iz-2+i| = 6$ 4) $|\bar{z}-1+2i| = |z-3-i|$

5) $z\bar{z}+i(z-\bar{z}) = -1$ 6) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}[\pi]$

EXERCICE7:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2i$; $b=-\sqrt{3}+i$ et $c=-\sqrt{3}-i$.

1) Placer les points A, B et C sur une figure.

2) Soit $Z = \dfrac{a-b}{c-b}$.

a. Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

b. Écrire Z sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC .

d. Déterminer $(\overline{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})$.

EXERCICE8:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, et f la transformation du plan qui à M d'affixe z associe M' d'affixe z' tel que : $z' = 4z + 6 - 3i$.

Déterminer l'unique point invariant de f et en déduire la nature et les éléments caractéristique de f.

EXERCICE9:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2$, $b=1+i\sqrt{3}$ et $c=1-i\sqrt{3}$.

1) **a.** Placer les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Démontrer que les points A , B et C sont sur un même cercle (Γ) de centre O.

c. Construire le cercle (Γ).

2) Déterminer un argument du nombre complexe b, et on déduire $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

EXERCICE10:

Soit m un nombre complexe de module 2 , a et b deux nombres complexes tel que :

$$a=1+i+m \quad \text{et} \quad b=1-i+m$$

1) Déterminer m pour que a et b soient conjugués.
2) Déterminer m pour que a et b soient de même module
3) Déterminer m pour que $a+ib=0$.

EXERCICE11:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) **a-** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-4z+8=0$.
b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $2-2i$ et $2+2i$.

a- Placer dans le plan les points A et B.

b- Quelle est la nature du triangle OAB ?

3) Soit le point C d'affixe : $z_C=(2-2i).e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a- Ecrire z_C sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

b- En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4) **a-** Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$.

b- quelle est la nature exacte du triangle OAC .

EXERCICE12: (Session normale 2015)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+10z+26=0$
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B , C et Ω d'affixes respectives : $a=-2+2i$; $b=-5+i$; $c=-5-i$ et $\omega=-3$

a) Vérifier que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$.

b) En déduire la nature du triangle ΩAB.

3) Soit D l'image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$.

a) Montrer que l'affixe de D est $d=1+3i$

b) Montrer que $\dfrac{b-d}{a-d}=2$, en déduire que A est le milieu $[BD]$.

EXERCICE13:

1) Linéarisez $\cos^4 x$ et $\cos^4 x\times\sin^2 x$.
2) Calculer les deux intégrales I et J suivants :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx \qquad \text{et} \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 x\times\sin^2 x)\,dx$$

EXERCICE14:

Soit $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0\,,\,\pi\right[$, on pose $Z=\dfrac{iz(z-1)}{z+1}$.

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes : $z+1$; $z-1$ et Z

2) Déterminer la partie réelle x de Z et la partie imaginaire y de Z .

EXERCICE15:

Le plan est rapporter au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Posons : $Z=\dfrac{z-(4+2i)}{z+2i}$

a) Déterminer la forme cartésienne de z' .

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit réel .

c) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que Z soit imaginaire pur .

d) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|Z|=1$