

# NOMBRES COMPLEXES

## A) L'ensemble $\mathbb{C}$ ; définition et vocabulaire

il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$  ses éléments s'appellent des nombres complexes qui vérifie :  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et contient un nombre non réel noté  $i$  et qui vérifie  $i^2 = -1$  et tout nombre complexe  $z$  s'écrit et de façon unique comme :  $z = a + ib$  où  $a$  et  $b$  réels  
Le réel  $a$  s'appelle la partie réel de  $z$  ; on écrit :  $a = \text{Re}(z)$   
Le réel  $b$  s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe  $z$  ; on écrit :  $b = \text{Im}(z)$  et L'écriture :  $z = a + ib$  s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$ .

1) Soient  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  ( $x, y \in \mathbb{R}^2$  et  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ )

deux nombres complexes :  $z = z' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$

2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

3) l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  est une partie de  $\mathbb{C}$   
( $\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$  et  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$

4) L'ensemble  $i\mathbb{R}$  est une partie de  $\mathbb{C}$ , s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ;  $i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$   $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$

5)  $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$  et  $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$  ( $\subsetneq$  : inclus strictement)

6) On généralise les calculs dans  $\mathbb{C}$  s'effectuent de même façon que sur  $\mathbb{R}$  seulement on remplace  $i^2$  par  $-1$  et on a :

a)  $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ou  $z' = 0$

b)  $z^0 = 1$  et ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) ( $z^n = \underbrace{z \times z \times \dots \times z}_n$ )  $n$  fois

c)  $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$  d)  $z^{n+m} = z^n \times z^m$  5)  $z^{n-m} = z^n / z^m$

e)  $(z^n)^m = z^{n \times m}$

f)  $z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \dots + z^1z_1^{n-2} + z_1^{n-1})$

g) Si  $z \neq 1$  alors :  $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

somme des termes d'une suite géométrique

7)  $(z + z_1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z_1^{n-k}$  formule de binôme

Lorsque  $\text{Im}(z) = 0$ ,  $z = a$  est réel.

Lorsque  $\text{Re}(z) = 0$ ,  $z = ib$  est appelé imaginaire pur.

## B) L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe :

Le plan  $(\mathcal{P})$  est muni du repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$   
soit  $\mathcal{V}_2$  le plan vectoriel associé à  $(\mathcal{P})$ .

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe le couple  $(a, b)$  est associé à un point unique  $M$  dans le plan  $(\mathcal{P})$ .

1) Le point  $M(a, b)$  s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan  $(\mathcal{P})$

2) Le complexe  $z$  s'appelle l'affixe du point  $M$

on écrit :  $z = \text{aff}(M)$  et on écrit :  $z_M = a + ib$

3) Le vecteur  $\vec{u}$  s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan  $(\mathcal{P})$  et Le complexe  $z$  s'appelle l'affixe du vecteur  $\vec{u}$  on

écrit :  $z = \text{aff}(\vec{u})$  on écrit :  $z_{\vec{u}} = a + ib$

7) Le plan  $(\mathcal{P})$  s'appelle un plan complexe

a) L'axe  $(O; \vec{u})$  s'appelle l'axe des réels

b) L'axe  $(O; \vec{v})$  s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout ce qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère  $\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$

8) Les complexes  $z = a \in \mathbb{R}$  sont des nombres réels et sont représentés sur l'axe des Réels.

9) Les complexes  $z = ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$  sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.

10) Les opérations sur les affixes.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs dans  $\mathcal{V}_2$  ;

$M$  et  $N$  deux points dans le plan  $(\mathcal{P})$  et  $\alpha$  un réel ; On a :

1)  $\text{aff}(A) = \text{aff}(B) \Leftrightarrow A = B$  et  $\text{aff}(\vec{u}) = \text{aff}(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

2)  $\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$

3)  $\text{aff}(\alpha \vec{u}) = \alpha \times \text{aff}(\vec{u})$

4)  $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A) = z_B - z_A$

5) Soient  $[AB]$  un segment de milieu  $I$  ; on a :  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

6) pour 2 points pondérés :  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  on a

$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$  pour 3 points pondérés :

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  on a :  $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

7) Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan d'affixes respectifs :  $z_A, z_B$  et  $z_C$

$A, B$  et  $C$  sont alignés  $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

## C) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Soient  $x$  et  $y$  deux réels et  $z = x + iy$ . Le conjugué du nombre  $z$  est le nombre complexe noté  $\bar{z}$  défini par :  $\bar{z} = x - iy$ .

et les images de  $z$  et  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

2)  $z \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}$

a) si  $z = x + iy$  alors  $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

b)  $\bar{\bar{z}} = z$  c)  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$  d)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

e)  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$  f)  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

g)  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$  h)  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

k)  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  si  $z \neq 0$  l)  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$  si  $z \neq 0$

m)  $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$   $n \in \mathbb{Z}$  n)  $\bar{\bar{z}} = \lambda \bar{z}$   $\forall z \in \mathbb{C}$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

#### D) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

le réel positif  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$  s'appelle le module du nombre complexe  $z$

2) Pour tous complexes  $z$  et  $z'$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on a :

1)  $|\bar{z}| = |-z| = |z|$  2)  $|z|^2 = z\bar{z}$  3)  $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$

4)  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  5)  $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

6)  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$  et  $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$  si  $z \neq 0$

7)  $|z^n| = |z|^n$  si  $z \neq 0$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}$  8)  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

8) si  $M$  est l'image du nombre complexe  $z$  alors  $|z| = OM$

9) Si  $A$  et  $B$  ont pour affixes  $z_A$  et  $z_B$  alors :

$$|\overline{AB}| = AB = |z_B - z_A|$$

#### E) forme trigonométrique et argument d'un complexe

1) Le plan complexe est muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et

$z \in \mathbb{C}^*$  et  $M(z)$  son image. L'argument du nombre complexe  $z$  une mesure (en radian) de l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  On le note par  $\arg(z)$

2)  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $y \in \mathbb{R}^*$

a)  $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi]$  b)  $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$

c)  $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  si  $y > 0$  et  $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  si  $y < 0$

d)  $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$  e)  $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$

3) Tout nombre complexe non nul  $z$  a une écriture de la forme  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  Où  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul  $z$

4)  $z \in \mathbb{C}^*$  Si on a  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $r > 0$

Alors  $|z| = r$  et  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$  on écrit :  $z = [r, \theta]$

5) Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls :

b)  $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$

c)  $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) [2\pi]$  et on a :  $1/[r, \theta] = [1/r, -\theta]$

d)  $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

et on a :  $[r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$

e)  $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$  et on a :  $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

f)  $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$  et on a :  $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$

g)  $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$  et on a :  $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage

