

Définition

✓ \ln (logarithme népérien) est la primitive de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et qui s'annule en 1

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\ln(1) = 0$$

propriétés

✓ \ln est une fonction définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

✓ \ln est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\bullet \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$$

$$\bullet \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\bullet \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\bullet \ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	+

Propriétés algébriques

$$\bullet \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\bullet \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

($x, y \in]0, +\infty[$)

$$\bullet \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\bullet \ln(x^r) = r \ln(x) \quad r \in \mathbb{Q}$$

Le nombre e

$$\ln(e) = 1$$

$$e \approx 2,71$$

$$\ln(e^r) = r$$

$r \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \ln(x) = r \Leftrightarrow x = e^r$$

Les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

La dérivation :

Si u est dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors la fonction $x \rightarrow \ln|u(x)|$

est dérivable sur I et on a : $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

La fonction logarithme de base a :

Définition

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

avec a un réel strictement positif et différent de 1

Résultats

$$\bullet \log_a(a) = 1 \quad \bullet \log_e(x) = \ln(x) \quad \bullet \log_a(a^r) = r$$

Logarithme décimal

Est La fonction logarithme de base 10, on la note \log

$$\checkmark \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \quad \log(10^r) = r$$