



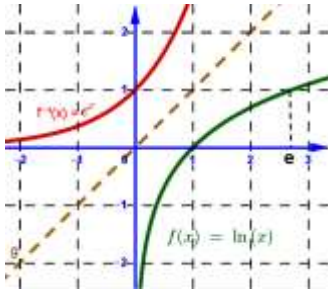
Fonctions logarithmes

La fonction logarithme népérienne $f(x) = \ln x$

$a > 0$ et $b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$

Signe de $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$ $	- 0 +	



• $D_f =]0, +\infty[$, continue et dérivable sur $D_f =]0, +\infty[$ avec $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

• $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ avec $e \approx 2,718...$ e est un nombre irrationnel.

• $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln a^r = r \ln a$

• $\forall a, b \in]0, +\infty[, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

• $\forall a, b \in]0, +\infty[, a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

• $f(x) = \ln(u(x))$, $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in D_u \text{ et } u(x) > 0)$

• $f'(x) = \left[\ln(u(x)) \right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont $F(x) = \ln|u(x)| + c$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

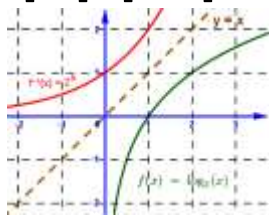
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \times \ln(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Logarithmes de base a

Logarithmes de base a :
 $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ $r \in \mathbb{Q}$



• $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$; $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$

• $a = 10$ donc $\log_{10}(x) = \text{Log}(x)$ (logarithme décimale)

• $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ et $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$

• $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$ et $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$f(x) = a^x$

La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$

Les fonctions exponentielles de base a

est : $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

$a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ $r \in \mathbb{Q}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x \times a^y = a^{x+y}; (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}; \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

• $0 < a < 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$$

• $a > 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$$

$$(a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$$

Rq : $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

• La fonction réciproque de $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto e^x$ définie de $\mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$. donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

• $D_f = \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}$ avec $(e^x)' = e^x$

• $f(x) = e^{u(x)}$, $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$

• $f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$ donc primitives de $u'(x) e^{u(x)}$ sont $F(x) = e^{u(x)} + c$

$$\left. \begin{array}{l} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \ln y \\ y > 0 \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, e^{\ln x} = x$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}, e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^x)^r = e^{rx}, e^x \times e^x = e^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$