Les fonctions logarithmiques

Prof. Smail BOUGUERCH

La fonction logarithme népérien:

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ (ou $\log_e$), est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1

Déductions et propriétés:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x$; $(r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ • $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ • $\ln x \succ \ln y \Leftrightarrow x \succ y$		
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ • $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

Si n est pair, alors $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \ln x^n = n \ln |x|$

Le Domaine de définition:

La fonction f est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ et $u(x) \succ 0\}$

Les limites:

Limites principales		Déductions
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$	$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x) - 1} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$		$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit a droite ou a gauche de x_0 ou bien au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

La continuité:

La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Si u est strictement positive et continue sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est continue sur l'intervalle I

La dérivabilité:

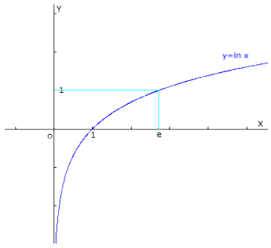
La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si u est strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I \ ; \ (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La représentation graphique:



signe de $\ln$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$

La fonction logarithme de base a avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

Définition:

La fonction logarithme de base a est la fonction notée : $\log_a$

tel que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier: la fonction $\log_{10}$ est la fonction logarithme décimal et on la note $\log$

Déductions et propriétés:

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall y \in]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x \in]0;+\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

Limites et inéquations:

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \succ y$	$\log_a x \succ \log_a y \Leftrightarrow x \prec y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$

La dérivée:

$$\forall x \in]0;+\infty[\ ; \ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$