

**Exercice 1 : (BAC 2007 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $v_n = u_n + n - 1$ .

① - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ .

② - a - Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b - En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

③ - On pose :  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  et  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$  et  $S_n = T_n - \frac{(n+1)(n-2)}{2}$ .

**Exercice 2 : (BAC 2008 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $u_n > 1$ .

② - On pose  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{3}{5}$ , puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$  puis Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 3 : (BAC 2009 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$ .

puis montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $1 - u_n > 0$ .

② - On pose  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :  $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{5}{6}$ , puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$  , en déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 4 : (BAC 2010 Session normale)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n - 1 > 0$ .

② - On pose  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , puis déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$  puis en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

③ - Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ , tel que  $(w_n)$  est la suite définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n = \ln(u_n)$ .

**Exercice 5 : (BAC 2010 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 21} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$ .

② - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$ .

③ - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et qu'elle est convergente.

④ - a - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$ .

b - Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 6 : (BAC 2011 Session normale)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{8u_n + 5} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$ .

② - On pose  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison 5, puis Calculer  $v_n$  en fonction de n.

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$  , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .

**Exercice 7 : (BAC 2011 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{6u_n}{15u_n + 1}$  et  $u_0 = 1$  .

① - a - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$  .

b - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \frac{1}{3}$  .

② - On pose  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$  .

Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{1}{6}$  , puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$  .

③ - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1}{3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$  , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$  .

**Exercice 8 : (BAC 2012 Session normale)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$  et  $u_0 = 11$  .

① - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$  .

② - a - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 12$  .

b - Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante

c - Dédire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

③ - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 12$  .

a - En utilisant la question ① Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{10}{11}$  , puis

Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$  .

b - Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  , puis calculer sa limite.

**Exercice 9 : (BAC 2012 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$  et  $u_0 = 3$  .

① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$  .

② - On pose  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  .

a - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$  . Et déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - v_n > 0$  .

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$  .

- ③ - a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{1}{7}$ , puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
 b - Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 10 : (BAC 2013 Session normale)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n}$  et  $u_1 = 0$ .

① - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ .

puis montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 5 - u_n > 0$ .

② - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \frac{5}{5 - u_n}$ .

a - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$ , puis vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} - v_n = 1$

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = n$ , En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 5 - \frac{5}{n}$ .

c - Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 11 : (BAC 2013 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$  et  $u_0 = 2$ .

① - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ .

② - a - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$ .

b - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c - Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

③ - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 1$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ , puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 12 : (BAC 2014 Session normale)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$  et  $u_0 = 13$ .

① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 14$ .

② - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 14 - u_n$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , puis Calculer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

c - Calculer la petite valeur de l'entier naturel  $n$  pour laquelle  $u_n > 13,99$ .

**Exercice 13 : (BAC 2014 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$  et  $u_1 = 5$ .

① - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > 2$ .

② - Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ .

a - Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ , puis montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison 1.

b - Ecrire  $(v_n)$  en fonction de  $n$ , en déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 2 + \frac{3}{n}$ .

c - Calculer la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 14 : (BAC 2015 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$  et  $u_0 = 4$ .

① - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 5$ .

② - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ , En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante.

③ - En déduire que  $(u_n)$  est convergente.

④ - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 5 - u_n$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$ , puis écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b - En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ , puis calculer la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 15 : (BAC 2016 Session normale)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n}$  et  $u_0 = 2$ .

① - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ , puis montrer par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 3$ .

② - Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ .

a - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ , puis écrire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c - Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 16 : (BAC 2016 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - a - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1.$

b - Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1),$  puis montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c - En déduire que  $(u_n)$  est convergente.

② - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 1.$

a - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{16},$  puis écrire  $v_n$  en fonction de  $n.$

b - Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n,$  puis déterminer la limite de la suite  $(u_n).$

**Exercice 17 : (BAC 2017 Session de rattrapage)**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 17 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12 \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N}).$$

① - a - Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 16.$

b - Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante, et déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

② - Soit  $(v_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - 16.$

a - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique .

b - Déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n,$  puis déterminer la limite de la suite  $(u_n).$

c - Calculer la petite valeur de l'entier naturel  $n$  pour laquelle  $u_n < 16,0001.$