## 1. Bac 2014 session normale

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que : $u_n < 14$ pour tout n de . ........................................ ( 0,75 )
2. On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .
   a. Montrer que : la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis écrire $v_n$ en fonction de n . ........ ( 1 )
   b. En déduire que : $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite $(u_n)$ .... ( 0,75 )
   c. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 13,99$. .................... ( 0,5 )

## 2. Bac 2014 session de rattrapage

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \ ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que : $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ . ........................................ ( 0,75 )
2. On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ .
   a. Montrer que : $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ , puis montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 1 . ........................................................................................ ( 1 )
   b. Ecrire $v_n$ en fonction de n , puis en déduire que $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ . .................. ( 0,75 )
   c. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ . ........................................................................ ( 0,5 )

## 3. Bac 2015 session normale ( fuite الذي تم تسريبه )

III. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

1. Montrer par récurrence que : $0 \le u_n \le \alpha$ pour tout n de . ........................................ ( 0,5 )
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante ( on peut utiliser le résultat de la question II 2 ) c - ) ..( 0,5 )
3. En déduire que $(u_n)$ est convergente .et déterminer la limite de la suite $(u_n)$ . .................. ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes : $f(x) = \frac{1}{x(1 - nx)}$. Et $2,2 < \alpha < 2,3$

- La fonction est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+e[$ et $]e,+\infty[$ .
- la question II 4) c- : $f(x) - x \le 0$ pour tout x de $[1,\alpha]$ .

- Tableau de variation de f est :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | | | | | | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ $1$ ↘ | $1$ | ↗ | $f(\alpha)=\alpha$ | ↗ $+\infty$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ |

## 4. Bac 2015 session normale ( الذي تم إعادته )

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$.

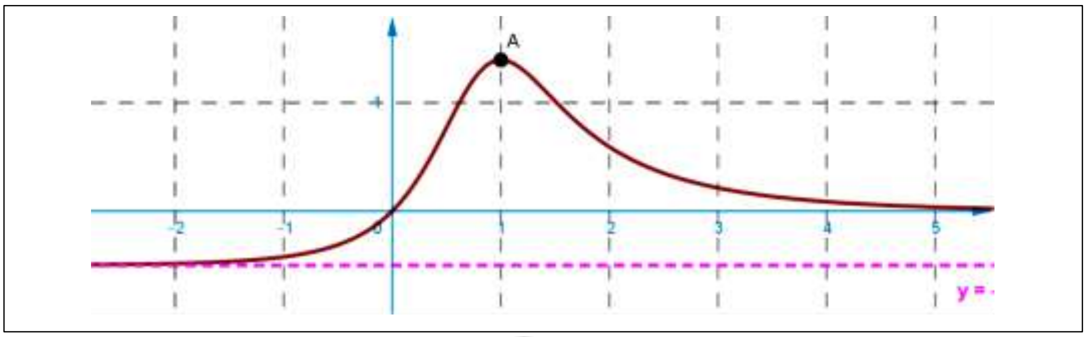
3. Démontrer par récurrence que : $u_n < 5$ pour tout n de . .................................................. ( 0,5 )
4. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de puis en déduire que $(u_n)$ est croissante . ..( 0,75 )
5. En déduire que $(u_n)$ est convergente . .................................................. ( 0,25 )
6. On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .
   a. Montrer que : la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{2}{5}$ puis écrire $v_n$ en fonction de n . ..... ( 0,75 )
   b. Montrer que : $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .et calculer la limite de la suite $(u_n)$ . ........ ( 0,75 )

## 5. Bac 2015 session de rattrapage

III. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

1. Montrer par récurrence que : $u_n \leq 0$ pour tout n de . .................................................. ( 0,5 )
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante ( on remarque graphiquement que $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty, 0]$ ) . .................................................. ( 0,75 )
3. En déduire que $(u_n)$ est convergente .et déterminer la limite de la suite $(u_n)$ . .................. ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes : $h(x) = f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$ sur $]-\infty, 0]$.



## 6. Bac 2016 session normale

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n} \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

**1.** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{5}(5-u_n)$ pour tout n de , puis démontrer par récurrence que : $u_n < 3$ pour tout n de . ............ ( 0,75 )

**2.** On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

**d.** Montrer que : la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ puis en déduire que : $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . ............ ( 0,75 )

**e.** Montrer que : $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis écrire $u_n$ en fonction de n . ............ ( 0,5 )

**f.** calculer la limite de la suite $(u_n)$ . ............ ( 0,5 )

## 7. bac 2016 session de rattrapage

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{16}u_n + \dfrac{15}{16}$ pour tout n de .

**1.** ..

**a.** Démontrer par récurrence que : $u_n > 1$ pour tout n de . ............ ( 0,5 )

**b.** Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{15}{16}(1-u_n)$ pour tout n de . ............ ( 0,5 )

**c.** Montrer que $(u_n)$ est décroissante et en déduire que $(u_n)$ est convergente . ............ ( 0,25 )

**2.** On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_n = u_n - 16$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

**a.** Calculer $u_1$ et $u_2$. ............ ( 0,5 )

**b.** Montrer que : la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$ puis écrire $v_n$ en fonction de n . ...... ( 1 )

**c.** Montrer que : $u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ , puis calculer la limite de la suite $(u_n)$ . .... ( 0,75 )

## 8. Bac 2017 session normale

**III.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

**1.** Montrer par récurrence que : $1 \le u_n \le 2$ pour tout n de . ............ ( 0,5 )

**2.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante ( on peut utiliser le résultat de la question II 4) c- ) ...( 0,5 )

**3.** En déduire que $(u_n)$ est convergente .et déterminer la limite de la suite $(u_n)$ . ............ ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes : $f(x) = x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$ .

- La fonction est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ .
- la question II 4) c- : $f(x)<x$ pour tout x de $[1,2]$ , position relative de la courbe $(C)$ et la droite $(D)$ d'équation $y=x$ sur $[1,2]$ .

| x | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | 0 | $-$ | 0 |
| | | $(C)$ est au dessous de $(D)$ | |
| Position relative de $(C)$ et $(D)$ | $(C)$ et $(D)$ se coupent | | $(C)$ et $(D)$ se coupent |

Tableau de variation de f est :

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ | $f(1)=1$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

## 9. Bac 2017 session de rattrapage

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0=17$ et $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+12$ pour tout n de .

1. ..
   a. Démontrer par récurrence que : $u_n>16$ pour tout n de . ................................................ ( 0,5 )
   b. Montrer que $(u_n)$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)$ est convergente . ........... ( 0,5 )
2. Soit $(v_n)$ la suite numérique telle que : $v_n=u_n-16$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .
   a. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire $v_n$ en fonction de n . .... ( 0,5 )
   b. En déduire que : $u_n=16+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ . , puis déterminer la limite de la suite $(u_n)$ ( 0,5 )
   c. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n<16,0001$ . ................ ( 0,5 )

## 10. Bac 2018 session normale

IV. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

4. Montrer par récurrence que : $0\le u_n\le 1$ pour tout n de . ............................................ ( 0,75 )
5. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante ( on peut utiliser le résultat de la question II 3 ) b- ) ..( 0,5 )
6. En déduire que $(u_n)$ est convergente .et déterminer la limite de la suite $(u_n)$ . .................. ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ .

- La fonction est décroissante sur $]-\infty,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$ .

- la question II 4) c- : $f(x)<x$ pour tout x de $[1,2]$ , position relative de la courbe $(C)$ et la droite $(D)$ d'équation $y=x$ sur $[1,2]$ .

| x | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-x$ | | + | 0 | $-$ | 0 | + | |
| Position relative de $(C)$ et $(D)$ | | $(C)$ est au dessus de $(D)$ | $(C)$ et $(D)$ se coupent | $(C)$ au dessous de $(D)$ | $(C)$ et $(D)$ se coupent | $(C)$ est au dessus de $(D)$ | |

Tableau de variation de f est :

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(0)=0$ | ↗ | $+\infty$ |

## 11. bac 2018 session de rattrapage

III. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$

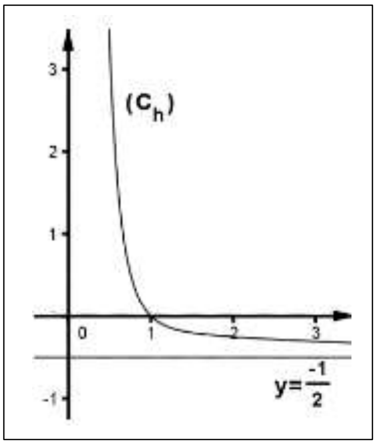
1. Montrer par récurrence que : $1\le u_n\le e$ pour tout n de . ........................................ ( 0,75 )
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante ( on pourra utiliser le résultat de la question III 1) b- ) . ........................................................................................................................ ( 0,75 )
3. En déduire que $(u_n)$ est convergente .et déterminer sa limite . ........................................ ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 .$$

- La fonction est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$ .
- la question III 1 ) b - $h(1)=0$ avec $h(x)=f(x)-x$

d'près la figure ci-contre qui la représentation graphique de la fonction h on détermine le de h et en déduire pour tout x de $[1,+\infty[$ on a $f(x)<x$




| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)=f(x)-x$ | ‖ | + | 0 | $-$ | |

Tableau de variation de f est :

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(1)=1$ | ↗ | $+\infty$ |

## 12. bac 2019 session normale

**DEUXIÈME** partie

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

**1.** ..

**a.** Montrer par récurrence que : $0 \le u_n \le e$ pour tout n de . ........................................ ( 0,5 )

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante . ........................................................... ( 0,5 )

**c.** En déduire que $(u_n)$ est convergente . ........................................................... ( 0,5 )

**2.** Calculer la limite de la suite $(u_n)$ . ........................................................... ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ .

- La fonction est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$ .
- la question II 4) c- : $f(x) < x$ pour tout x de $[1,2]$ , position relative de la courbe $(C)$ et la droite $(D)$ d'équation $y = x$ sur $[1,2]$ .

| x | 0 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - x$ | ‖ | + | 0 | + | |
| Position relative de $(C)$ et $(D)$ | ‖ | $(C)$ est au dessus de $(D)$ | ‖ | $(C)$ est au dessus de $(D)$ | |
| | | | $(C)$ et $(D)$ se coupent en $x_0 = e$ | | |

Tableau de variation de f est :

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{3}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

.

## 13. bac 2019 session de rattrapage

**DEUXIÈME.** partie

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ .

**3.** ..

**a.** Montrer par récurrence que : $2 \le u_n \le 4$ pour tout n de . ........................................ ( 0,5 )

**b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante puis En déduire que $(u_n)$ est convergente . ..... ( 0,5 )

**c.** Calculer la limite de la suite $(u_n)$ . ........................................................... ( 0,75 )

Les résultats de quelques questions précédentes : $f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$.

- La fonction est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et $[2, +\infty[$ .
- la question 2$^{ième}$ partie 2) b- : $f(x) < x$ pour tout x de $[2,4]$ et $f(4) = 4$ .

Tableau de variation de f est :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ‖ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 2 | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |