

Suites numériques

I) Définition, vocabulaires et notations.

Définition : Toute fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$, ou d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ est dite suite numérique.

Notation et vocabulaire.

- L'image de n par la suite u est notée u_n au lieu de $u(n)$.
- La suite est notée $(u_n)_{n \in I}$ (ou plus simplement (u_n) si $n \in \mathbb{N}$).
- u_n est un « terme » de la suite, et on l'appelle terme général de la suite.
- Si la suite commence par u_1 , alors u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme, ou terme de rang n .
- Si la suite commence par u_0 , u_n est le terme de rang $n+1$.
- On peut définir une suite par une **formule explicite**, c'est-à-dire par une relation du type : $u_n = f(n)$
- On peut définir une suite par **réurrence**, c'est-à-dire par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou par d'autres types.

II) Monotonie d'une suite numérique

Soit I une partie de $\mathbb{N}$ tel que : $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p \text{ avec } p \in \mathbb{N}\}$

Définitions : On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement décroissante, si $(\forall n \geq p) : u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est strictement croissante, si $(\forall n \geq p) : u_{n+1} \geq u_n$.

III) Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

Définitions :

- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que $(\forall n \geq p) : u_n \leq M$.
Le nombre M est alors appelé un **majorant** de la suite $(u_n)_{n \geq p}$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que : $(\forall n \geq p) : u_n \geq m$.
Le nombre m est alors appelé un **minorant** de la suite $(u_n)_{n \geq p}$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :

- Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme u_0 .
- Si (u_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme u_0 .

IV) Suite arithmétique – Suite géométrique.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
$(u_n)_{n \geq p}$ est une suite	S'il existe un réel r tel que : $(\forall n \geq p) : u_{n+1} - u_n = r$ (r est appelé raison de la suite)	S'il existe un réel q tel que : $(\forall n \geq p) : u_{n+1} = q u_n$ (q est appelé raison de la suite)
u_n en fonction de n	$(\forall n \geq p) : u_n = u_p + (n - p)r$	$(\forall n \geq p) : u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme des premiers termes d'une suite	$S = \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right) (n - p + 1)$	$S = u_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$ avec $q \neq 1$

Avec $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n$

V) Limite d'une suite numérique.

1) Suites de référence – suite convergente.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** vers le réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

- Une suite est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

- Des suites **convergentes** vers 0 : $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$; $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où p est un entier naturel non nul.
- Des suites **divergentes** vers $+\infty$: $(n^p)_{n \geq 0}$; $(\sqrt[n]{n})_{n \geq 0}$ où p est un entier naturel non nul.
- Limite d'une suite **géométrique** :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	<i>pas de limite</i>	0	1	$+\infty$

2) Critères de convergence.

Théorème 1 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 2 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors (u_n) est **convergente** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - L| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors (u_n) est **convergente** et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Théorème 3 :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque : Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

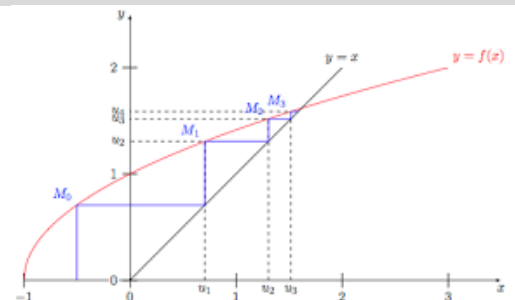
3) Théorème de convergence des suites récurrentes.

Propriété : Soit (u_n) une suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 \in I$$

Si f est **continue** sur I , $f(I) \subset I$ et (u_n) est **convergente** alors la limite ℓ de (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$

On dit que ℓ est un "point fixe" de la fonction f .



Principe de récurrence :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n , on procède en deux étapes, puis on conclut.

- **Première étape :** On vérifie que P_0 est vraie.
- **Deuxième étape :** On suppose que pour un entier naturel n quelconque, la propriété P_n est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion :** lorsque les deux étapes sont franchies, on conclut que la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n positif.