

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivantes, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 et interpréter le résultat graphiquement.

$$\textcircled{1} - \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x+1} \\ f(-1) = 5 \end{cases} ; x_0 = -1 \quad :: \quad \textcircled{2} - \begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{\tan x} \\ f(0) = 0 \end{cases} ; 0 < x < \frac{\pi}{2} ; x_0 = 0$$

$$\textcircled{3} - \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} ; x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 2 ; x \geq 1 \end{cases} ; x_0 = 1 \quad :: \quad \textcircled{4} - \begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{4-x^2} ; 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x-2} ; x > 2 \end{cases} ; x_0 = 2$$

Exercice 2 :

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivantes :

$$\textcircled{1} - f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad :: \quad \textcircled{2} - f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1} \quad :: \quad \textcircled{3} - f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{x-1} \right)^4$$

$$\textcircled{4} - f(x) = x^3 \times \cos(x^2 - x) \quad :: \quad \textcircled{5} - f(x) = x^5 \times \sqrt[3]{x^2 - 3x + 5}.$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$

① - a - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat graphiquement.

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

b - Etudier les variations de f .

④ - a - Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.

b - Etudier la concavité de la courbe (\mathcal{C}_f) et déterminer ce point d'inflexion.

⑤ - Etudier les branches infinie de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

⑦ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $[4; +\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b - Calculer $(g^{-1})'(9)$.

c - Calculer $(\forall x \in J): g^{-1}(x)$.

d - Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = x - 1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

- ① - Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.
- ② - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ③ - a - Montrer (Δ) d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) au voisinage de $\pm\infty$.
b - Etudier les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) .
- ④ - Etudier la dérivabilité de f en 0 à gauche et interpréter le résultat graphiquement.
- ⑤ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$, puis Dresser le tableau de variation de f .
- ⑥ - Montrer que la courbe (\mathcal{C}_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α tel que $2 < \alpha < \frac{5}{2}$.
- ⑦ - Tracer (\mathcal{C}_f) et (Δ) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- ⑧ - Soit m un paramètre réel. Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{\frac{x}{x-1}} = x - 1 - m$.
- ⑨ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$.
a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b - Calculer $g^{-1}(0)$, puis montrer que $(g^{-1})'(0) = \frac{2(\alpha-1)^3}{1+2(\alpha-1)^3}$.
c - Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par: $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$.

- ① - Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② - Montrer (Δ) d'équation $y = -x + \frac{2}{3}$ est une asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}_f) .
- ③ - Etudier la dérivabilité de f en 2 à gauche et en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- ④ - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0, 2\}$, puis Dresser le tableau de variation de f .
- ⑤ - Tracer (\mathcal{C}_f) et (Δ) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- ⑥ - Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. et calculer $(g^{-1})'(1)$